16.901 作业#4

期限：3 月 17 日，下午 2:00

问题#1： 1 维欧拉方程的特征根

1 维流的欧拉方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial x}=0\text{，} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u^{2}\right)}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\left(\rho E\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u E\right)}{\partial x}=-\frac{\partial\left(p u\right)}{\partial x} \tag{3}$$

其中ρ是密度，u 是流速，p 是压力，E 是总能量。当用数值方法求解这些方程组时，通常用守恒量把欧拉方程整理为守恒形式：

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F\left(U\right)}{\partial x}=0,\quad U=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho E\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^{2}+p\\ \rho u H\end{pmatrix} \tag{4}$$

这里 H 是总的焓，它与前面各量的关系为：

$$H=E+\frac{p}{\rho}.$$

注意，总能量（E）和总焓（H）与能量（e）和焓（h）的关系由下面的公式给出：

$$E=e+\frac{1}{2}u^{2}$$

$$H=h+\frac{1}{2}u^{2}$$

为了使方程封闭，我们还需要热力学状态方程。假设这里的流体为空气，并可以认为是理想气体。则压力和能量的状态方程可以写为：

$$p=\rho RT \tag{5}$$

$$e=c_{v}T \tag{6}$$

其中R为气体常数，T为温度，c_v为定容热容。另一个很有用的热力学量为定压热容，c_p，它与R和c_v的关系为：

$$c_p - c_v = R$$

另外，$\gamma = c_p / c_v$ 为热容比。最后，对于理想气体，压力与声速 c 的关系可表示为

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

1. 利用各个定义和热力学关系式，证明压力由下式给出

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho u^2).$$

2. 在这一步，我们将推导 1 维欧拉方程的线性形式。特别考虑由常数和扰动构成的状态向量，

$$U\left(x,t\right) = \bar{U} + \varepsilon \tilde{U}\left(x,t\right), \tag{7}$$

其中$\bar{U}$ 是常状态向量（即它不随 x 或 t 变化）,$\tilde{U}$ 是扰动量，它依赖于 x 和 t.

将（7）式引入（4）式，证明当$\epsilon \ll 1$ 时，$\tilde{U}$ 满足方程：

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + A\left(\bar{U}\right)\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

其中，

$$A\left(\bar{U}\right) = \left.\frac{\partial F}{\partial U}\right|_{U=\bar{U}}$$

3. 证明欧拉方程的矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\gamma - 3\right)u^2 & \left(3-\gamma\right)u & \gamma - 1 \\ \left(\gamma - 1\right)u^3 - \gamma u E & -\frac{3}{2}\left(\gamma - 1\right)u^2 + \gamma E & \gamma u \end{pmatrix}$$

4. 证明线性欧拉方程的解存在，其形式为，$\tilde{U}(x,t) = \tilde{U}(x - \lambda t)$，其中$\lambda$是矩阵 A 的特征根。对 1 维欧拉方程计算λ.

问题#2：逆风差分和数值损耗

1. 考虑 1 维偏微分方程，

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}=0$$

在一般的情况下，速度可正可负，对方程运用逆风差分（即单边的）近似。常用以下近似

$$u_i\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_i=\begin{cases}u_i\delta_x^+T_i & \text{if } u_i<0\\ u_i\delta_x^-T_i & \text{if } u_i>0\end{cases}$$

证明这个有方向依赖性的差分格式可以写成

$$u_i\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_i=u_i\delta_{2x}T_i-\frac{1}{2}\left|u_i\right|\Delta x\delta_x^2T_i, \qquad (9)$$

其中δ_{2x}和δ_x^2是 1 阶和 2 阶导数的标准中心差分算子。

2. 在计算流体力学（CFD）关于求解无粘性流的算法的早期研究中，通用的方法是加上一个数值的（而非物理的）耗散来改进离散化的稳定性。考虑修正的方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}=k_{num}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

其中k_{num}是数值的粘性系数。如果对x的导数均由标准中心差分来近似，则k_{num}的值使得有限差分法的结果与前面（9）式给定的逆风离散化一致。

3. 当求解粘性流时，物理耗散的存在可能使数值算法稳定。作为一个简化模型，假设我们想求解

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}=k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\cdot$$

雷诺数是用来决定与粘性效应有关的无粘性的重要性的。对机翼问题，雷诺数定义为：

$$\mathrm{Re}=\frac{uc}{k}$$

其中c是机翼的弦长。商用跨音速飞机机翼的典型雷诺数大约为 10^7。对于这

一情形，需要多大的$\Delta x/c$才能使物理耗散与逆风近似产生的数值耗散相等呢？根据这一结果，仅用物理耗散进行数值近似的稳定化是否合理？

问题#3：对流方程的矩阵稳定性分析

本问题中，我们将分析对流方程的中心差分离散化的特征值稳定性。

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}=0$$

因此，用中心差分近似得到的半离散格式为：

$$\frac{\partial T_j}{\partial t}+u\delta_{2x}T_j=0\cdot$$

我们假设本问题是长度为 L 的周期问题，且网格是由 J 个等分点限制的。

1. 证明在这一近似下，得到的半离散方程（即：仅做空间的离散化而不做时间的离散化）有如下形式：

$$\frac{d\hat{T}}{dt}+A\hat{T}=0,$$

其中$\hat{T}$ 是未知量 T 在各节点上取值构成的向量:

$$\hat{T}(t)=\left[T_1(t),T_2(t),T_3(t),\ldots T_J(t)\right],$$

A 是下面形式的矩阵，

$$A=\begin{pmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & a \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ c & 0 & 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}\cdot$$

特别地，对离散化确定 a,b,和 c 的值。

2. A 的特征根由下式给出：

$$\lambda_j = b + (a+c)\cos\left(\frac{2\pi j}{J}\right) - i(a-c)\sin\left(\frac{2\pi j}{J}\right), \quad \text{对 } j = 0,\ 1,\ 2, \cdots, J-1.$$

求出这个中心差分离散化的特征值。在复平面上画出特征值。

3. 用向前欧拉方法离散化时，保持稳定的最大步长是多大？注意：用几何的方法来做，把向前欧拉方法的稳定区域与（以Δt 为单位的）特征值重叠画在一起。用 J=20. 包括一张特征值叠画在向前欧拉方法的稳定区域上的图。

4. 假设对时间积分时用 4 阶龙格库塔方法。最大时间步长是多大？注意：再次用几何的方法来做。用 J=20. 包括一张特征值叠画在 4 阶龙格库塔方法的稳定区域上的图。