

## 16.901 家庭作业答案

### 问题一：辛普森方法分析

常微分方程求积的辛普森方法如下：

$$\frac{v^{n+1} - v^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{6} \left[ f(v^{n+1}, t^{n+1}) + 4f(v^n, t^n) + f(v^{n-1}, t^{n-1}) \right]$$

#### 1. 这个方法是显式求解还是求解？

该方法是隐式求解，因为  $t^{n+1}$  处解的数值取决于  $t^{n+1}$  处的导数值。

#### 2. 利用泰勒级数分析，计算辛普森方法的局部截断误差，并说明该方法精确到多少阶？

局部误差由下面公式给出：

$$e = N(u^n) - u^{n+1}$$

对于辛普森方法：

$$N(u^n) = v^{n+1} = u^{n+1} + \frac{\Delta t}{3} \left[ f(u^{n+1}, t^{n+1}) + 4f(u^n, t^n) + f(u^{n-1}, t^{n-1}) \right]$$

首先看方程右边， $f(u^{n+1}, t^{n+1})$ ， $f(u^{n-1}, t^{n-1})$  的泰勒展开如下：

$$\begin{aligned} f(u^{n+1}, t^{n+1}) &= \frac{du^{n+1}}{du} \\ &= \frac{du^n}{dt} + \frac{d^2u^n}{dt^2} \Delta t + \frac{d^3u^n}{dt^3} \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{d^4u^n}{dt^4} \frac{\Delta t^3}{6} + \frac{d^5u^n}{dt^5} \frac{\Delta t^4}{24} + \frac{d^6u^n}{dt^6} \frac{\Delta t^5}{120} + \dots \\ f(u^{n-1}, t^{n-1}) &= \frac{du^{n-1}}{du} \\ &= \frac{du^n}{dt} - \frac{d^2u^n}{dt^2} \Delta t + \frac{d^3u^n}{dt^3} \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{d^4u^n}{dt^4} \frac{\Delta t^3}{6} + \frac{d^5u^n}{dt^5} \frac{\Delta t^4}{24} - \frac{d^6u^n}{dt^6} \frac{\Delta t^5}{120} + \dots \end{aligned}$$

将上面两式代入辛普森规则右边第二项，合并得到：

$$\frac{\Delta t}{3} \left[ f(u^{n+1}, t^{n+1}) + 4f(u^n, t^n) + f(u^{n-1}, t^{n-1}) \right]$$

$$= 2 \frac{du^n}{dt} \Delta t + \frac{d^3 u^n}{dt^3} \frac{\Delta t^3}{3} + \frac{d^5 u^n}{dt^5} \frac{\Delta t^5}{36} + \dots$$

$u^{n-1}$  的幂级数展开为:

$$u^{n-1} = u^n - \frac{du^n}{dt} \Delta t + \frac{d^2 u^n}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{d^3 u^n}{dt^3} \frac{\Delta t^3}{6} + \frac{d^4 u^n}{dt^4} \frac{\Delta t^4}{24} - \frac{d^5 u^n}{dt^5} \frac{\Delta t^5}{120} + \dots$$

结合以上各式有:

$$N(u^n) = u^n + \frac{du^n}{dt} \Delta t + \frac{d^2 u^n}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{d^3 u^n}{dt^3} \frac{\Delta t^3}{6} + \frac{d^4 u^n}{dt^4} \frac{\Delta t^4}{24} + \frac{d^5 u^n}{dt^5} \frac{7\Delta t^5}{360} + \dots$$

计算误差需要的最后一个泰勒级数是  $u^{n+1}$ ,

$$u^{n+1} = u^n + \frac{du^n}{dt} \Delta t + \frac{d^2 u^n}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{d^3 u^n}{dt^3} \frac{\Delta t^3}{6} + \frac{d^4 u^n}{dt^4} \frac{\Delta t^4}{24} + \frac{d^5 u^n}{dt^5} \frac{\Delta t^5}{120} + \dots$$

将  $N(u^n)$ ,  $u^{n+1}$  代入误差计算公式, 有

$$e = N(u^n) - u^{n+1} = \frac{d^5 u^n}{dt^5} \frac{\Delta t^5}{90} + O(\Delta t^6),$$

所以误差的阶数:  $p = 5 - 1 = 4$

### 3. 辛普森方法收敛吗? 说明其理由

因为辛普森方法的局部精度阶数为 4, 可知该方法是一致的。而收敛的其它要求就是要看当时间步长趋于零时的稳定性, 为了搞清此方法是否为零稳定的, 将式子两端同时乘以  $\Delta t$  后, 再令  $\Delta t = 0$ , 得到

$$v^{n+1} - v^{n-1} = 0$$

进行变量替换:  $v^n = z^n v_0$ , 则有:

$$z^{n-1} v_0 (z^2 - 1) = 0$$

解得:  $z = \pm 1$  因为  $|z| \leq 1$ , 所以是零稳定的, 又因为辛普森方法既是稳定的, 又是一致的, 所以也是收敛的。

4. 画出辛普森方法的特征值稳定区域。用辛普森方法求积，对于纯负实数的特征值而言，要保持其稳定性的最大时间步长是多少？

首先，将辛普森公式改写为特征值问题：

$$\frac{v^{n+1} - v^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{6}(\lambda v^{n+1} + 4\lambda v^n + \lambda v^{n-1})$$

$$\left(1 - \frac{\lambda\Delta t}{3}\right)v^{n+1} - \frac{4\lambda\Delta t}{3}v^n - \left(1 + \frac{\lambda\Delta t}{3}\right)v^{n-1} = 0$$

假设  $v^n = g^n v_0$ ，则有：

$$g^{n-1}v_0 \left( \left(1 - \frac{\lambda\Delta t}{3}\right)g^2 - \frac{4\lambda\Delta t}{3}g - \left(1 + \frac{\lambda\Delta t}{3}\right) \right) = 0$$

变换方程，可以把  $\lambda\Delta t$  用  $g$  表示，

$$\lambda\Delta t = \frac{3(g^2 - 1)}{g^2 + 4g + 1}$$

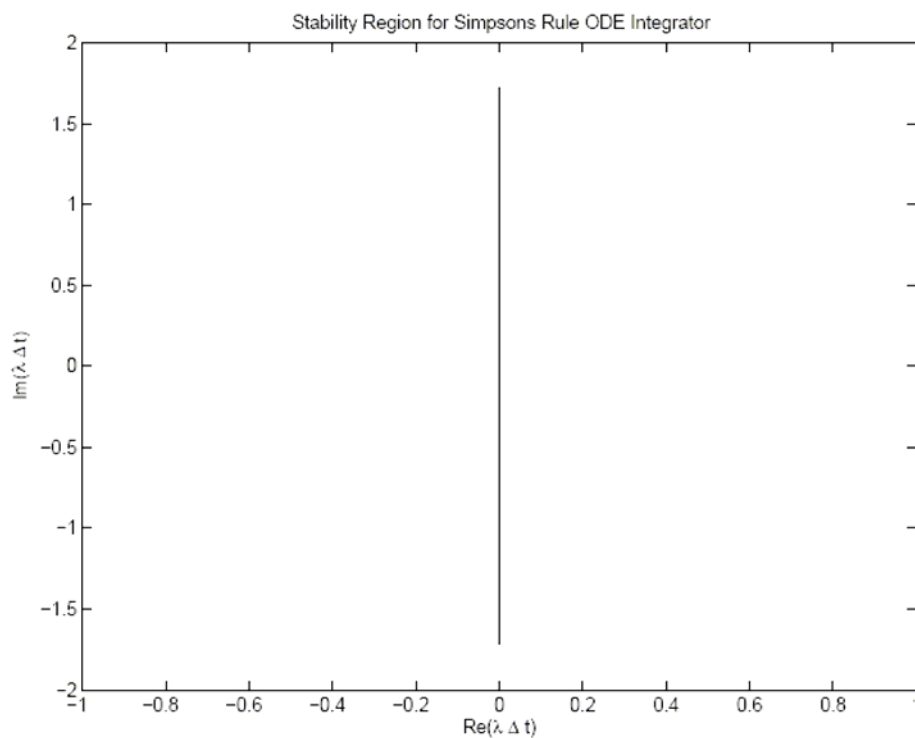


图 1：常微分方程辛普森积分方法稳定性的等高图

为了在 Matlab 中画出这幅图，将  $g = e^{i\theta}$  代入上面的方程，画出  $\theta$  对应于从 0 到  $2\pi$  的所有  $z$  值，稳定区域就是从  $-1.75i$  到  $1.75i$  的虚轴。因此，辛普森方法对于任何实特征值都是不稳定的，取任何时间步长都无济于事。

## 问题二：导数逼近的精度

### 1. 进行截断误差分析，并确定单侧逼近精度的阶数 $p$ ，

$$\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_j + O(\Delta x^p)$$

$T_{j-1}$  的泰勒展开如下：

$$T_{j-1} = T_j - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_j \Delta x + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_j \frac{\Delta x^2}{2} - \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_j \frac{\Delta x^3}{6} + \left. \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right|_j \frac{\Delta x^4}{24} + \dots$$

从  $T_j$  减去  $T_{j-1}$  再除以  $\Delta x$  得出

$$\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_j + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_j \frac{\Delta x}{2} + \dots$$

精度的阶数： $p = 1$

### 2. 导出对于一阶导数形式来说最准确的单侧逼近

$$\frac{aT_j + bT_{j-1} + cT_{j-2}}{2\Delta x} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_j + O(\Delta x^p)$$

特别的，确定对应其最高精度的常数  $a, b, c$  的值，并说明其中的  $p$  是多少？

对于这个问题，我们还需要  $T_{j-2}$  的泰勒展开：

$$T_{j-2} = T_j - 2 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_j \Delta x + 2 \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_j \Delta x^2 - \frac{4}{3} \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_j \Delta x^3 + \dots$$

每个级数中的  $T_j$  项的线性组合的和必须为零，这个条件由系数  $a, b, c$  来确定，即：

$$a + b + c = 0$$

此外，各级数中的一阶导数项的和必须为 1，即  $-\frac{b}{2} - c = 1$

最后，为了得到比 1 阶精度更好的结果，二阶导数项的和也必须为零，即： $\frac{b}{2} + 2c = 0$

三个未知数，三个方程，可以求解，得：

$$a = 3, \quad b = -4, \quad c = 1$$

为了求截断误差，利用泰勒级数的线性组合，

$$\frac{3T_j - 4T_{j-1} + T_{j-2}}{2\Delta x} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_j - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_j \Delta x^2 + \dots$$

精度的阶数： $p = 2$

### 3. 进行截断误差分析，确定用下面公式进行逼近的精度阶数 $p$

$$\frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_j + O(\Delta x^p)$$

截断误差可以通过前面已经得到的  $T_{j-1}$  的泰勒级数和下面的  $T_{j+1}$  的泰勒级数展开来计算：

$$T_{j+1} = T_j + \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_j \Delta x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_j \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \Big|_j \frac{\Delta x^3}{6} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \Big|_j \frac{\Delta x^4}{24} + \dots$$

将其带入差分公式，可得：

$$\frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_j + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \Big|_j \frac{\Delta x^2}{12} + \dots$$

这表明精度的阶数为： $p = 2$

### 4. 导出对于二阶导数形式来说最准确的单侧逼近

$$\frac{aT_j + bT_{j-1} + cT_{j-2}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_j + O(\Delta x^p)$$

特别的，确定对应其最高精度的常数  $a, b, c$  的值，并说明其中的  $p$  是多少？

利用已有的  $T_{j-1}$ ,  $T_{j-2}$  的泰勒展开，可以找到  $a, b, c$  的条件。第一个条件就是必须消掉  $T_j$ ，用数学语言就是： $a + b + c = 0$

第二个标准就是一阶导数项也必须消掉，即： $-b - 2c = 0$

最后保留二阶导数项，即： $\frac{b}{2} + 2c = 1$

解得： $a = 1, b = -2, c = 1$

既然已经得到了差分格式，精度的阶数可以通过把泰勒级数带入原表达式得出：

$$\frac{T_j - 2T_{j-1} + T_{j-2}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_j - \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \Big|_j \Delta x + \dots$$

精度的阶数为： $p = 1$