16.901 作业#1 参考答案

截止日期：2 月 12 日

说明：

这个家庭作业将分两步完成。第一步，请不要借助任何书本或笔记回答问题，时间不超过一个小时。并且，不要为了完成这一步进行任何相关的学习。第二步：可以参考书或者笔记，并且不做时间限制。下面是每一步的具体说明。

闭卷指导：

• 在一个小时内不借助任何书或者笔记完成下面作业。在家庭作业卷上写下你的最直接反应。

• 这一步并不是要检查你们每一个个体，我只对你们的整体表现感兴趣。我会利用这一步的数据来告知系里预习中可能出现的任何问题。这一步的结果将不计入你的家庭作业成绩(除非象开卷说明中说的那样在开卷的答案中包括了这里的内容)。

• 在回答这些问题的过程中，请使用下面的程序。在解题前先把所有的题目浏览一遍，并在每个问题上写下以下内容：

可以做：表示你可以在不需要任何其他帮助的情况下完成这道题目。

需要书：表示如果你有书或者笔记就肯定可以做 ，但是如果没有书或者笔记情况下不确定怎样解。

没有线索：表示你不知道从何下手，而且以前也没有接触过类似的问题。

• 在浏览完第一遍后，开始做题，并且在时间允许的情况下尽可能多的做“可以做”的题。然后，如果有时间剩余，可以尝试做“需要书”的题。

开卷指导：

- 完成一个小时的闭卷作业后，你可以借助你的笔记或者其他的参考资料完成这些习题。
- 用其它纸(而不是作业题纸)写开卷答案。

- 如果你认为你在第一步就把问题正确回答了，你可以在这一步中略过这些题目。在这种情况下，可以在你的答卷上写上“参看闭卷答题纸”。也就是说，你在这一步中只需要做你在第一步中解得不正确或者没有解的题。
- 你的家庭作业成绩将参看你的开卷结果(包括你选择的开卷中可用的结果)。

问题：

1. 令 $f(x)=\cos x+\cos x^2$，计算对 $f(x)$ 在 x=0 求泰勒级数展开的前三项，即，找出下面式子中的c_0,c_1,c_2：　　$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+$更高阶项

2. 按如下一阶耦合的常微分方程形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\\ \dot{z}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(z_1,z_2,z_3,z_4,t)\\ f_2(z_1,z_2,z_3,z_4,t)\\ f_3(z_1,z_2,z_3,z_4,t)\\ f_4(z_1,z_2,z_3,z_4,t)\end{bmatrix}$$

改写以下二阶非线性常微分方程：

$$\begin{aligned}\ddot{x}+\dot{x}\dot{y}^2+x&=t^2\\ \ddot{y}+\dot{y}+\dot{x}+xy&=0\end{aligned}$$

16.901：　数学技能诊断

说明：

- 这一步并不是把你们作为一个个体来检查，我只对你们的整体表现感兴趣。我会利用这一步的数据来告知系里预习中可能出现的任何问题。这一步的结果将不计入你的家庭作业成绩(除非象开卷说明中说的那样在闭卷的答案中包括了这里的内容)。
- 在回答这些问题的过程中，请使用下面的程序。在解题前先把所有的题目浏览一遍，并在每个问题上写下以下内容：

可以做：表示你可以在不需要任何其他帮助的情况下完成这道题目。

需要书：表示如果你有书或者笔记就肯定可以做 ，但是如果没有书或者笔记情

况下不确定怎样解。

没有线索：表示你不知道从何下手，而且以前也没有接触过类似的问题。

- 在浏览完第一遍后，开始做题，并且在时间允许的情况下尽可能多的做“可以做”的题。然后，如果有时间剩余，可以尝试做“需要书”的题。

问题：

1. 令 $f(x)=\cos x+\cos x^2$，计算对 $f(x)$ 在 x=0 做泰勒级数展开的前三项，即，

   找出下面式子中的c_0, c_1, c_2：　　$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+$更高阶项

解：

$$f(x)\cong f(0)+\left.\frac{df}{dx}\right|_0 x+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_0 x^2+\cdots$$

$$\left.\begin{aligned}
&f(0)=\cos 0+\cos 0^2=2\\
&\frac{df}{dx}=-\sin x-2x\sin x\\
&\quad\Rightarrow\left.\frac{df}{dx}\right|_0=0\\
&\frac{d^2f}{dx^2}=-\cos x-2\sin x-2x\cos x\\
&\quad\Rightarrow\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_0=-1
\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)\cong 2-\frac{1}{2}x^2$$

2. 按如下一阶耦合的常微分方程形式：

$$\begin{bmatrix}\dot z_1\\ \dot z_2\\ \dot z_3\\ \dot z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(z_1,z_2,z_3,z_4,t)\\ f_2(z_1,z_2,z_3,z_4,t)\\ f_3(z_1,z_2,z_3,z_4,t)\\ f_4(z_1,z_2,z_3,z_4,t)\end{bmatrix}$$

改写以下二阶非线性常微分方程：

$$\begin{aligned}&\ddot x+\dot x\dot y^2+x=t^2\\&\ddot y+\dot y+\dot x+xy=0\end{aligned}$$

解：

$$\left.\begin{aligned}&z_1 = x\\&z_2 = \dot{x} = \dot{z}_1 \to \boxed{\dot{z}_1 = z_2}\\&z_3 = y\\&z_4 = \dot{y} = \dot{z}_3 \to \boxed{\dot{z}_3 = z_4}\end{aligned}\right\}\text{带入方程得：}\quad \boxed{\begin{cases}\dot{z}_2 = -z_2 z_4^2 - z_1 + t^2\\ \dot{z}_4 = -z_4 - z_2 - z_1 z_3\end{cases}}$$

3. 证明：如果 $u(a) = u(b) = 0$，那么下式成立：

$$\int_a^b u\frac{d^2v}{dx^2}dx = -\int_a^b \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx$$

提示：利用分步积分公式。

证：

$$\begin{aligned}\int_a^b u\frac{d^2v}{dx^2}dx &= \int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(u\frac{dv}{dx}\right) - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\right]\\ &= \underbrace{u\frac{dv}{dx}\bigg|_a^b}_{0} - \int_a^b \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx\\ \Rightarrow &\boxed{\int_a^b u\frac{d^2v}{dx^2}dx = -\int_a^b \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx}\end{aligned}$$

4. 已知函数 $f(x)$在 $x=x^*$时具有最小值，那么 $f(x)$的一阶和二阶导数在 $x=x^*$时是怎样的情况？

解：

$$f'(x^*) = 0$$
$$f''(x^*) < 0$$

5. 设 x 是均值为 μ_x，标准差为 σ_x 的随机变量，求函数 $f(x) = a + b(x)$ (其中 a,b

为常数)的均值 μ_f 和标准差为 σ_f 。

解：

$$\text{令：} \mu_x = E[x] \quad \sigma_x^2 = E[(x-\mu_x)^2]$$

$$\Rightarrow E[f] = E[a+bx] = E[a] + E[bx] = a + bE[x]$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_f = a + b\mu_x}$$

$$\sigma_f^2 = E[(f-\mu_f)^2] = E[(a+bx-a-\sigma\, b\mu_x)^2]$$

$$= E[b^2(x-\mu_x)^2]$$

$$\boxed{\sigma_f^2 = b^2\sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_f = b\sigma_x}$$

6. 考虑下列线性常微分方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \mathrm{A}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \text{其中} \mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 20 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

初始条件为：$z_1(0) = 1, z_2(0) = 100$ 。求：

(a) A 的特征值

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 20 \\ -5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 + 100 = 0$$

$$\Rightarrow (-1-\lambda)^2 = -100$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -1 \pm 10i}$$

(b) 在 $t \to \infty$ 时，这些量(即 z_1和z_2)的模将增大还是减小？

由于解的形式为：$\vec{z}(t) = \alpha_+ + e^{(-1-10i)t}\vec{r}_+ + \alpha_- + e^{(-1-10i)t}\vec{r}_-$ (*)

则，显然有：$t \to \infty$时, 因为$e^{-1t} \to 0$,则$|\vec{z}| \to 0$

(c) 这些状态量是否有振荡？如果有，周期是多少？

由于特征值存在虚部，这些量是存在振荡的。特别有，$e^{\pm i10t} = \cos 10t + i\sin 10t$，因此，周期为：$\boxed{T = \dfrac{2\pi}{10}}$

7. 对前面给出的方程组，确定在给定的初始条件下 $z_1(t)$和$z_2(t)$ 的解析解。

要得到解最系统的方法就是利用其特征值。解的一般形式如上面的(*)式，其中$\bar{r}_\pm$ 为 $\lambda_\pm = -1 \pm 10i$ 对应的特征向量。

求特征值的方法：$(A-\lambda_t I)\vec{r}_\pm = 0$

$$\begin{bmatrix} \mp i10 & 20 \\ -5 & \mp i10 \end{bmatrix} \vec{r}_\pm = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{r}_\pm = \begin{bmatrix} \mp 2i \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\vec{z}(t) = \alpha_+ e^{(-1+i10)t} \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_- e^{(-1-i10)t} \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ie^{-t}\{-\alpha_+[\cos 10t + i\sin 10t] + \alpha_-[\cos 10t - i\sin 10t]\} \\ e^{-t}\{\alpha_+[\cos 10t + i\sin 10t] + \alpha_-[\cos 10t - i\sin 10t]\} \end{bmatrix}$$

而在$t=0$

$$\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i\{-\alpha_+ + \alpha_-\} \\ \{\alpha_+ + \alpha_-\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

定义：$\alpha_+ = \alpha_+^{(r)} + i\alpha_+^{(i)}, \alpha_- = \alpha_-^{(r)} + i\alpha_-^{(i)}$

则：$z_1(0) = 2i\{-(\alpha_+^{(r)} + i\alpha_+^{(i)}) + i(\alpha_-^{(r)} + i\alpha_-^{(i)})\} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_+^{(r)} + \alpha_-^{(r)} = 0 \\ -\alpha_+^{(i)} + \alpha_-^{(i)} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

类似的:由$z_2(0)$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_+^{(r)} + \alpha_-^{(r)} = 100 \\ \alpha_+^{(i)} + \alpha_-^{(i)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_+ = 10 + i\dfrac{1}{4} \\ \alpha_- = 50 - i\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos 10t + 200\sin 10t) \\ e^{-t}(100\cos 10t - \dfrac{1}{2}\sin 10t) \end{bmatrix}}$$