

# 19.601: 有限差分 PDE 方案

## 燃烧室衬垫温度气膜冷却的影响

期限: 3月18日 下午 2:00

### 1 背景知识

在燃烧室基本区域内的温度是显著地高于大部分未经特殊耐热处理的材料可承受的温度的。于是, 燃烧室设计的一个关键点就是找出一种冷却燃烧室衬垫壁的方法, 使衬垫温度充分低于其材料的耐受极限。一种典型的使燃烧室衬垫冷却的方法是借助气膜冷却。气膜冷却是将气体事先从主流通道导入燃烧室, 然后沿着衬垫表面重新放出, 形成一层较冷的气体膜来保护衬垫。

在这个项目里, 你要模拟气流和衬垫壁来估计气膜冷却技术的有效性, 与此相关的模型见图 1。指定的参数列于表 1。假设进入燃烧室内的气体的我们感兴趣的参数范围在  $x=0$  时满足:

$$\text{对 } x=0, y>h \quad : U = U_{hot}, T = T_{hot}.$$

$$\text{对 } x=0, 0 < y \leq h \quad : U = U_{cool}, T = T_{cool}.$$

$$\text{对 } x=0, -t_w \leq y \leq 0 \quad : U = 0, T = T_{cool}. \quad (\text{注意: 在衬垫壁内没有对流})$$

$$\text{对 } x=0, y < -t_w \quad : U = U_{cool}, T = T_{cool}.$$

通过此区域的速度仅在  $x$  轴方向, 且由进气口的值给定, 即:

$$U(x, y) = U(0, y), \quad V(x, y) = 0.$$

本模型的基本方程将是个对流—扩散方程, 且将包括一个可变的热传导以操纵气流和衬垫壁之间的传导变化。因此, 在整个感兴趣的范围内的基本方程为:

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

在燃烧区域的出口, 我们用“抛物型”方程的形式。这里假设  $x$  的二阶导数与  $y$  的二阶导数相比很小。

$$\text{在 } x=L, \quad U \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

### 2 任务

## 2.1 非均匀格点间隔的有限差分近似

为有效地研究气膜冷却问题，需要在衬垫附近区域划分较细的  $y$ -间隔网，而在远离衬垫的区域划分较粗的  $y$ -间隔网。于是， $y$ -间隔就是指标  $j$  的函数：

$$\Delta y_{j+\frac{1}{2}} \equiv y_{j+1} - y_j$$

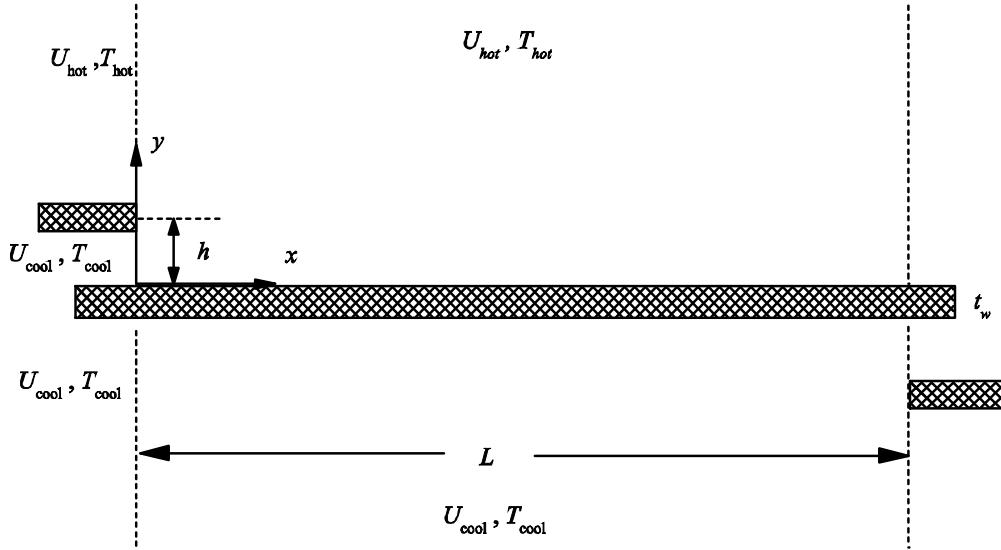


图 1: 带冷却膜的燃烧室衬垫

参数	定义	值
$k_g$	气体传导率	0.1W/(m K)
$k_w$	壁传导率	26.0W/(m K)
$h$	冷却通道高度	0.001-0.005 m
$L$	冷却通道之间的轴向长度	0.3 m
$U_{hot}$	热流速度	100 m/sec
$U_{cool}$	冷流速度	50-250 m/sec
$T_{hot}$	热流温度	2200 K
$T_{cool}$	冷流温度	800 K
$t_w$	衬垫壁厚度	0.0015 m

表 1: 参数定义和取值

在  $x$  轴方向，保持不变的间隔  $\Delta x$ . 用台劳展开，可得  $a$  和  $b$  的值，使得

$$\frac{a \left( k_{j+\frac{1}{2}} \frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} \right) - b \left( k_{j-\frac{1}{2}} \frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \right)}{\frac{1}{2} \left( \Delta y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \right)} \quad (1)$$

等于  $\frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$  在第  $j$  个位置的近似。注意，记号  $k_{j+\frac{1}{2}}$  定义为

$$k_{j+\frac{1}{2}} = k \left[ \frac{1}{2} (y_j + y_{j+1}) \right].$$

## 2.2 格点生成

实施有限差分法的第一步是推出针对本问题的格点产生器。为简化有限差分运算，我们将按前面说过的，在  $x$  轴方向，保持常数间隔（即： $\Delta x = \text{常数}$ ）你要给出  $y$ -间隔的处理，但要满足下列要求：

- 为简单起见，要求衬垫壁表面  $y = -t_w$  和  $y = 0$  处均为网格线。
- 在衬垫内， $y$  用常数间隔。
- 在气流内部， $y$ -间隔在壁的附近和  $y = h$  附近要比远离衬垫壁的地方小，以便正确地模拟这些位置的热层次。当  $|y|$  增加时， $y$ -间隔也应增加，因为在这些区域，什么都没发生。
- 产生  $y$  格点的方式应该比较灵活的，使得你可以增加一些格点，或者拉大网格等等。这将有助于研究方法的精度。

给出格点产生器的算法并画几张图来说明所产生格点的例子。

## 2.3 衬垫分析有限差分法的实现

对  $\frac{\partial T}{\partial x}$  用二阶精度的向后差分，对  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  用二阶精度的中心差分以及 2.1 节导出的

近似，实现本问题的有限差分算法。直接用 MATLAB 解矩阵方程的功能（如对流-扩散方程的例子，提供在线求解）求解方程的线性化系统。下面是一些特别的建议/意见：

- 在衬垫壁内，我们处理的是不发生对流的固体物质，所以基本方程化为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0.$$

- 对于物质表面上的网格线，还是用衬垫的方程，但须记住，在这种情况下， $k_{j \pm \frac{1}{2}}$  等于  $k_w$  或者  $k_g$  取决于位于壁内还是气流内。对于  $x$ -导数近似需要  $k_j$  的值，在表面点用  $k_j = k_w$ 。
- 对于较大的  $|y|$ ，设定多远的地方为上下边界是有些自由度的。唯一的约束是边界应距离衬垫壁足够的远，使得壁温度的分布不受影响。  
实现（差分）方法并给出算法，包括原程序。注意：无须给出离散化的完整描述，但你的描述应为这个领域的专家提供足够的信息，使得他们无需源程序就能理解你的离散化和边界条件。

## 2.4 温度预报的精度研究

为使你的模型在衬垫气膜冷却设计中有使用价值，衬垫壁温度的预报必须精确。同时，允许引入速度设计的研究。模型的运行时间应尽可能地短。用你推导的网格产生方法，改变网格和拉伸因子的大小（同时在  $x$  和  $y$  方向），导出对给定参数值壁温度在 10K 精度以内的基线网格。下面是有关网格研究的一些建议：

- 研究精度时，从某个网格开始不断倍分网格点（a）仅在  $x$  方向，（b）仅在  $y$  方向，（c）同时在  $x$  和  $y$  方向。由此，你可以建立一个壁内温度分布的“精确”解，且得到  $x$  和  $y$  所需的分辨率有多大。在做此研究时，你应保持固定的拉伸方式（即：你可以用拉伸因子，但不改变其方式，这样你就可以只研究网格的大小而不考虑拉伸的影响）。
- 按照第一个建议建立了合理精度的网格后，你应估计在多远的地方设定外部边界。
- 完成上述步骤后，你可以做些拉伸调试，看看在远处区域不减少精度的条件下能减少多少格点。

在报告中提交你关于精度研究（支持你所推出的基线网格）的文本。

## 2.5 冯·纽曼分析

假设对一个不稳定的问题使用这个模型，则基本方程变为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

你希望确定在你采用的空间离散化条件下是否可以用向前欧拉方法在给定的时间内对方程进行积分。用冯·纽曼分析估算方法的稳定性并确定本问题中哪个区域（例如在壁内，在气流中但靠近壁的地方，在气流中但远离表面的地方）对时间步长的限制最厉害。将基线网格的大小和上述研究的参数只用于最终结果。注意：在导出冯·纽曼分析的分析表达式后，仅替换网格和参数值的指定值。