16.901 家庭作业

期限：3 月 10 日下午两点

问题一：辛普森方法分析

常微分方程求积的辛普森方法如下：

$$\frac{v^{n+1}-v^{n-1}}{2\Delta t}=\frac{1}{6}\left[f\left(v^{n+1},t^{n+1}\right)+4f\left(v^{n},t^{n}\right)+f\left(v^{n-1},t^{n-1}\right)\right]$$

1. 这个方法是隐式求解还是显式求解？
2. 利用泰勒级数分析，计算辛普森方法的局部截断误差，并说明该方法精确到多少阶?
3. 辛普森方法收敛吗？并说明其理由。
4. 画出辛普森方法的特征值稳定区域。用辛普森方法求积，对于纯负实数的特征值而言，要保持其稳定性的最大时间步长是多少？

问题二：导数逼近的精确性

在下面的问题中，我们将看到一阶导数和二阶导数的逼近，即 $\frac{\partial T}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$，我们假设 x 轴被一系列点等分为若干长度为 Δx 的区间，第 j 个节点位于 $x_j = j\Delta x$ 处，该处的值 T 可以用带下脚标 T_j 的表示。

1. 进行截断误差分析，并确定单侧逼近精确度的阶数 p，

$$\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x}=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_j + O\left(\Delta x^p\right)$$

2. 推导出对于一阶导数形式来说最准确的单侧逼近，

$$\frac{aT_j + bT_{j-1} + cT_{j-2}}{2\Delta x} = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_j + O\left(\Delta x^p\right)$$

特别的，确定对应其最高精确度的常数a,b,c的值，并说明其中的p是多少？

3. 进行截断误差分析，确定用下面公式进行逼近的精确度的阶数p，

$$\frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{\Delta x^2} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_j + O\left(\Delta x^p\right)$$

4. 推导出对于二阶导数形式来说最准确的单侧逼近，

$$\frac{aT_j + bT_{j-1} + cT_{j-2}}{\Delta x^2} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_j + O\left(\Delta x^p\right)$$

特别的，确定对应其最高精确度的常数a,b,c的值，并说明其中的p是多少？