

# 16.901: 有限元方法实例

## ——涡轮叶片传热

### 1. 背景知识

在涡轮工作的第一个阶段，叶片受燃烧室里的热气体产生的高温气流影响。因此，涡轮叶片常通过泵入叶片通道中的低温空气进行内部冷却。在这一实例中，我们将用有限元离散化方法模拟内部冷却的涡轮叶片的传热过程。图一为有四个内部冷却通道叶片的示意图，包括粗略的网格单元(三角形)。这种叶片以及我们所考虑的问题在大型涡轮发动机中是非常典型的。

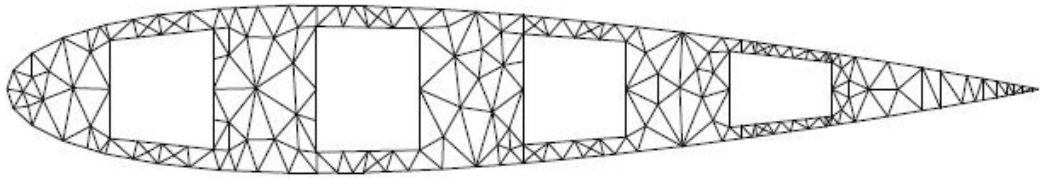


图 1:有冷却通道的叶片几何图形，包括粗糙的网格。

热传导方程是关于温度的扩散方程，

$$\nabla^2 T = 0$$

而传热率可由以下方程得出，

$$\vec{q} = -k\nabla T$$

其中  $k$  是叶片材料的热传导率。边界条件为对流传热条件。对叶片表面，传出的热流量为：

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = h_{ext}(T - T_{ext})$$

这里  $h_{ext}$  为对流传热系数， $T_{ext}$  为叶片外部的温度。注意  $\vec{n}$  为叶片的外法线方向单位矢量，因此  $\vec{q} \cdot \vec{n}$  代表流出叶片的热流。在冷却通道处的热流也是类似的，

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = h_{int}(T - T_{int})$$

同样， $\vec{n}$  为叶片的外法线方向单位矢量(指向冷却通道)，因此  $\vec{q} \cdot \vec{n}$  代表流出叶片的热流。

在所示的网格中，叶片的尺度已经用弦长  $L$  无量纲化了。因此，坐标值实际

为  $x/L$  和  $y/L$ 。温度为：

$$T_{ext} = 1300^{\circ}\text{C} \quad T_{int} = 200^{\circ}\text{C}$$

在这种情况下，热传导系数的无量纲形式为，

$$\frac{h_{ext}L}{k} = 14.0 \quad \frac{h_{int}L}{k} = 4.7$$

网格	节点	$h_{\max}$	$T_{\max}$	$T_{\min}$	CPU 时间
粗糙					
中等					
细致					

表 1：对三类网格的节点数、网格容量，最大叶片温度及 CPU 时间的比较。

## 2. 任务：

### 2.1 有限元方法实现

首要任务是得到这个问题的有限元方法解算器。已经产生了三种形式的网格。数据存在 MATLAB 的数据文件 `g0012coarse.mat`，`g0012medium.mat` 以及 `g0012fine.mat` 中(注意：这些数据文件是以二进制行是存储的，因此不能编辑)。`Bladeheat.m` 是该问题的求解程序纲要。请仔细阅读源程序中的注释，包括网格数据的储存方式以及怎样写程序的剩余部分。

以下是该任务的文件：

- 一个注释完整的 MATLAB 源程序(或者是若干个程序，如果你把解算程序分成几个模块)。如果你的程序很清晰，在程序的注释中写明了每一步做的是是什么，你将会得到好分数。你的注释应该写得尽量详尽，使得对热传导和有限元了解些许的人也能够清楚地明白你在程序中要做什么。
- 画出三种网格情况下的温度分布
- 注意：由于算法是对拉普拉斯方程进行标准有限元方法离散化，因此不需要使用源程序之外的其他算法。

## 2.2 精度及工作量研究

尽管我们还没有解决这个问题的精确的方法,我们还是可以研究随着网眼大小的增加,模拟的结果是如何变化的。特别的,对表一中每种网格,利用以下方法计算网格的  $h_{\max}$ 。

- 对每一个单元,计算过三角元三个节点的圆的半径。
- 将所有单元半径的最大值设为  $h_{\max}$ 。

讨论观察到的  $h_{\max}$ ,  $T_{\max}$ ,  $T_{\min}$  的变化趋势,以及计算格点元节点数的 CPU 时间,如果经过叶片的温度值精度需要设在准确值的  $10^{\circ}\text{C}$  范围之内,按你的研究,应该推荐用哪个网格。

## 2.3 设计建议

根据模拟结果,你推荐用什么方法来改进内部冷却设计从而降低叶片中的温度?