

16.901 有限差分法方案

风洞内机翼上方气流的模拟

示范解答

1 背景知识

机翼上的气流，特别是受力，常常是通过风洞试验来估计的。遗憾的是风洞壁对于空气动力学是有影响的，会导致机翼上产生不同的气流。其中某些影响可以通过无粘性势流的计算估计出来。本方案将推出风洞试验截面内刻画机翼上方的无粘性，不可压缩流的有限元方法。

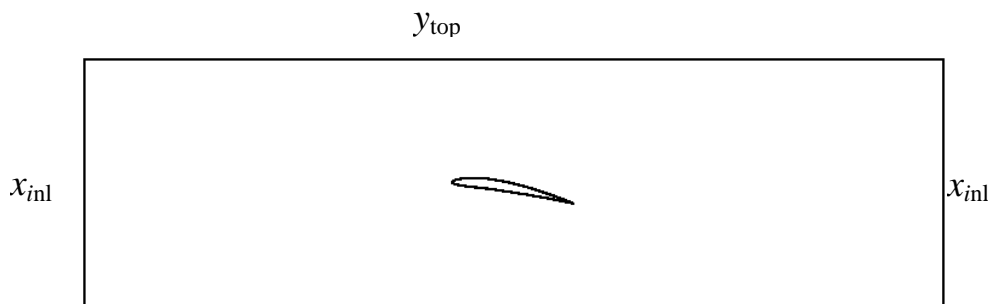


图 1: 风洞/机翼计算区域

参数	定义	值
x_{inl}/c	入口位置	-3.0
x_{out}/c	出口位置	4.0
y_{bot}/c	底部壁位置	-1.0
y_{top}/c	顶部壁位置	1.0

表 1: 风洞计算区域的边界位置（注意：是机翼的翼弦）。

图 1 显示了风洞的计算区域。指定的几何参数值由表 1 给出。 x 和 y 的速度分量 u 和 v 可以通过二维流的流函数 Ψ 求出，

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

在无旋流（即散度为零的流体）中，流函数 Ψ 的基本控制方程是：

$$\nabla^2 \Psi = 0,$$

在计算区域的出入口，我们假设气流只有 x 方向的分量（即 $v=0$ ），于是，边界条件为，

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad \text{当 } x = x_{\text{inl}} \text{ 和 } x = x_{\text{out}} \text{ 时。}$$

计算区域的顶部和底部都是壁，因而就是气流的流线。所以，壁上的边界条件将是 Dirichlet 条件，

$$\Psi(x, y_{\text{top}}) = \Psi_{\text{top}}, \quad \Psi(x, y_{\text{bot}}) = \Psi_{\text{bot}}.$$

Ψ_{top} 和 Ψ_{bot} 可以通过固定风洞的质流率来设置。首先，我们注意到经过风洞的质量流为，

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{tunnel}} &= \rho \int_{y_{\text{bot}}}^{y_{\text{top}}} u dy, \\ &= \rho \int_{y_{\text{bot}}}^{y_{\text{top}}} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy, \\ &= \rho(\Psi_{\text{top}} - \Psi_{\text{bot}}). \end{aligned} \quad (1)$$

为设置质量流的实际值，我们假设平均的迎风速度是 U_{∞} 。在此假设下，风洞内的质量流也可写作，

$$\dot{m}_{\text{tunnel}} = \rho U_{\infty} (y_{\text{top}} - y_{\text{bot}}). \quad (2)$$

因此，由（1）和（2）式中质量流的等量代换给出，

$$\Psi_{\text{top}} - \Psi_{\text{bot}} = U_{\infty} (y_{\text{top}} - y_{\text{bot}}).$$

因为可以在 Ψ 上任意增加一个常数（因为 Ψ 的导数值才决定流速），我们可以选取 $\Psi_{\text{bot}} = U_{\infty} y_{\text{bot}}$ ，这给出壁边界条件的最后形式

$$\Psi_{\text{bot}} = U_{\infty} y_{\text{bot}}, \quad \Psi_{\text{top}} = U_{\infty} y_{\text{top}}.$$

机翼表面将是一条流线（即 Ψ 取常数），因此机翼上的边界条件将为 Dirichlet 条件，

$$\Psi|_{\text{机翼}} = \Psi_a,$$

其中 Ψ_a 为某常数。 Ψ_a 的取值将在任务的说明中进行讨论。

2 任务

2.1 称流的有限元方法（50%）

第一个任务是导出求解对称机翼周围的气流在零迎角的有限差分方法。在此情况下，气流是对称的（因为机翼也处于风洞中心），于是，机翼上的流函数值为保证对称性必为零。故 $\Psi_a=0$ 。网格由三角形元构成，图 2 画出了该网格的图。解算器以文档形式附在MATLAB源程序中。图 3 绘出了气流的流线图。

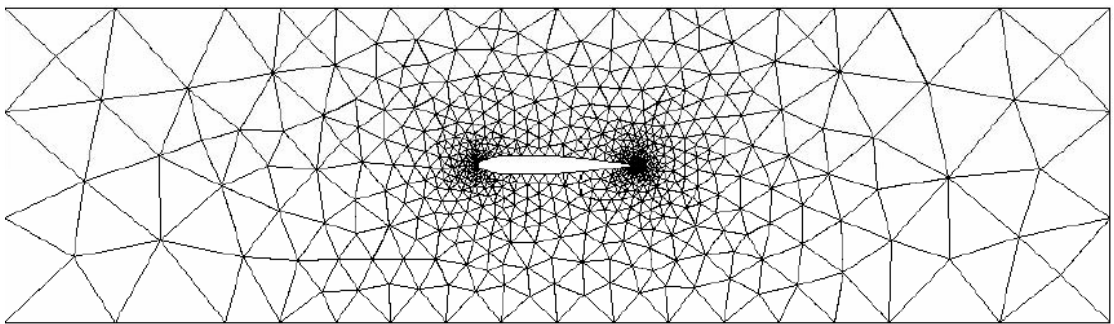


图 2： NACA（National Advisory Committee for Aeronautics 国家航空咨询委员会）0012 问题的网格。

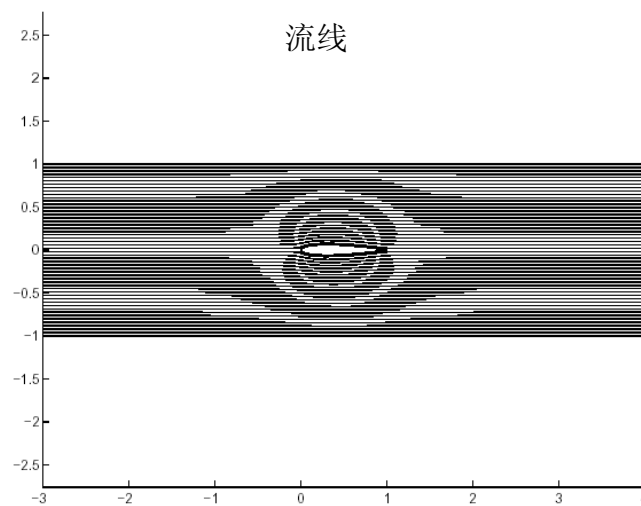


图 3 NACA 0012 问题的流线

2.2 压力系数的计算（10%）

无粘性，无旋流的压力系数可由伯努利方程求解，

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{q}{U_\infty} \right)^2,$$

其中 $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ 是局部流速。各元素的速度分量可根据流函数的梯度计算得出而且可以用来求各元素中的 C_p 。各元素的中流函数梯度的计算是差值节点的梯度和三角节点梯度的线性组合，

$$\Psi_T(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^3 \Psi_i N_i(\xi_1, \xi_2),$$

其中 Ψ_i 是 Ψ 在第 i 个三角形节点上的值（由 FEM 解算器确定）。 $N_i(\xi_1, \xi_2)$ 是线性节点插值。为求出关于 (x, y) 的梯度，我们进行微分，

$$\nabla \Psi_T = \sum_{i=1}^3 \Psi_i \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}.$$

以上求导公式在解算器中已给出，但它仅对线性元素是标准的。关于 NACA 0012 流体的 C_p 在图 4 中绘出。

2.3 对非对称流的修正（20%）

对非对称流，机翼表面的流函数在模拟前是不知道的。因此须由某些其它的约束来求得。为此，我们将用 Kutta 条件。Kutta 条件要求流体平滑地离开前缘。为保证这个条件，要求流体在后缘时沿着后缘角平分线的方向。后缘的几何在图 5 中画出。由于流体是沿着 \vec{n}_{te} 方向的，所以 Ψ 在这个方向必为常数（由于 Ψ 的常数线是流体的流线）。这样，Kutta 条件变为，在后缘，

$$\nabla \Psi \cdot \vec{n}_{te} = 0.$$

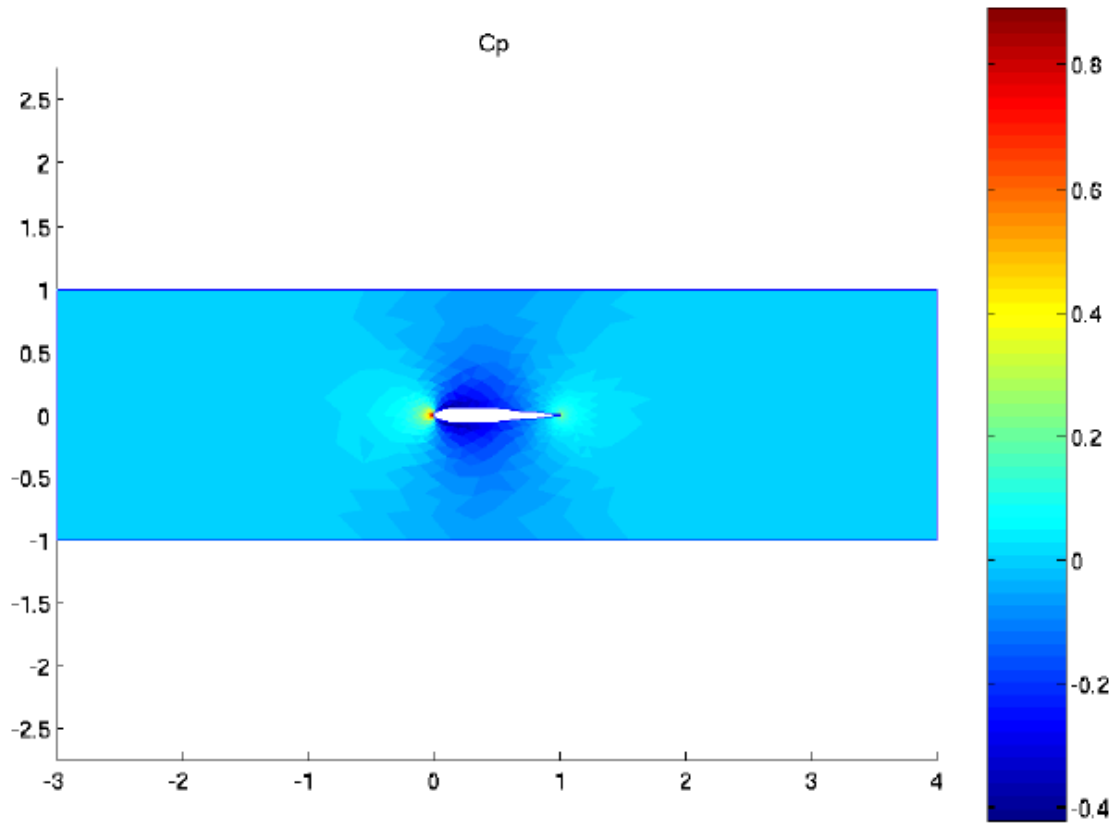


图 4 问题NACA 0012 的 C_p 。

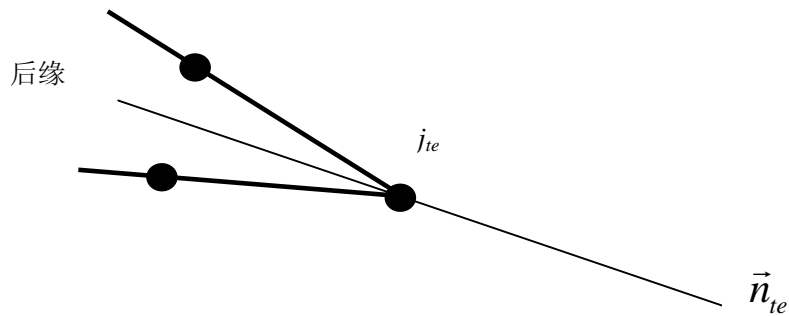


图 5: 后缘几何。 \vec{n}_{te} =后缘角平分线方向矢。 j_{te} =后缘节点的指标。

在有限差分方法中，我们将用加权的剩余形式实现这个条件，明确地来说就是

$$R_{te} \equiv \iint_{\Omega} w_{te} \nabla \Psi \cdot \vec{n}_{te} dA = 0,$$

其中 Ω 是总的积分区域， w_{te} 是在后缘节点 j_{te} 处的权函数。如果 N_v 是顶点的总数，我们从加权的剩余形式和 Dirichlet 边界条件中可以导出 N_v 个方程，还可以从 Kutta

条件中导出一个方程。未知量是 Ψ 在节点的 N_v 个值和流线在机翼上的值 Ψ_a 。因此我们有 N_v+1 个方程和未知数。MATLAB程序中关于 R_{te} 的数值计算是通过单点高斯积分来实现的(所需公式见 2.1 节)。另外的求解细节可从程序中找到。

算法先是对 NACA 0012 的情形进行检验, 结果与 2.1 节的模拟一致。然后, 改进后的解算器在弧形的——NACA 4408 的情形——的机翼上进行测试, 迎角设为 0 度和 10 度。NACA 4408 情形的结果在图 6, 7 和 8 中示出。正如在后缘附近的流线图所示, Kutta 条件在流线沿着后缘角平分线方向明显地离开后缘时, 已经很好地实现了。

2.4 \vec{x} 关于 $\vec{\xi}$ 的面积元素关系式的推导

在本节里, 我们将导出 \vec{x} 坐标系和 $\vec{\xi}$ 坐标系之间面积元的关系, 即

$$dA = |J| d\xi_1 d\xi_2 \quad \text{其中 } J = \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_1}.$$

为此, 考虑图 9 所示的梯形面元, 其中梯形的节点位置为:

$$\begin{aligned} \vec{x}_A &= \vec{x}(\xi_1, \xi_2), \\ \vec{x}_B &= \vec{x}(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2), \\ \vec{x}_C &= \vec{x}(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2) \\ \vec{x}_D &= \vec{x}(\xi_1, \xi_2 + d\xi_2) \end{aligned}$$

坐标位置的一阶台劳展开给出,

$$\begin{aligned} \vec{x}_A &= \vec{x}(\xi_1, \xi_2), \\ \vec{x}_B &= \vec{x}(\xi_1, \xi_2) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} d\xi_1, \\ \vec{x}_C &= \vec{x}(\xi_1, \xi_2) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} d\xi_2 \\ \vec{x}_D &= \vec{x}(\xi_1, \xi_2) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} d\xi_2. \end{aligned}$$

\vec{x} 坐标系的面积元是由梯形的对角线叉积的一半(绝对值)给出的。

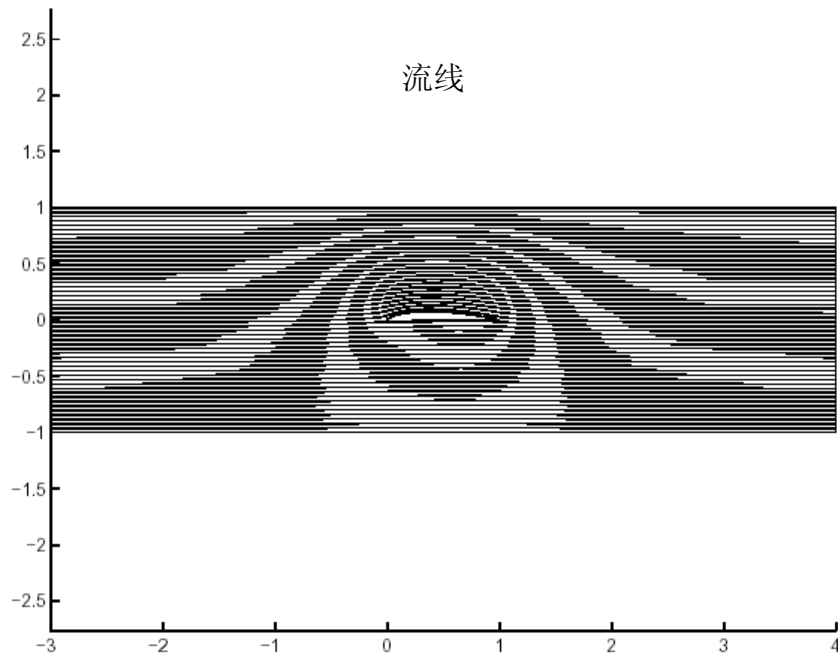
$$dA = \frac{1}{2} |(\vec{x}_c - \vec{x}_A) \times (\vec{x}_D - \vec{x}_B)|$$

于是，对个坐标带入台劳展开近似值，

$$dA = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} d\xi_2 \right) \times \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} d\xi_2 - \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right) \right|$$

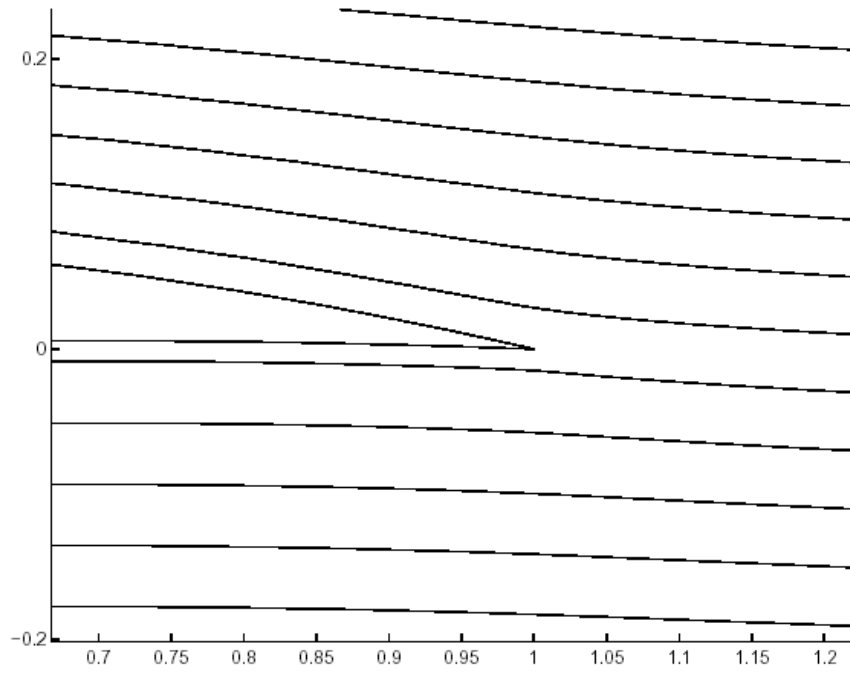
展开此式为矩阵分量形式，

$$dA = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi_2} d\xi_2 & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial y}{\partial \xi_2} d\xi_2 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} d\xi_2 - \frac{\partial x}{\partial \xi_1} d\xi_1 & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} d\xi_2 - \frac{\partial y}{\partial \xi_1} d\xi_1 & 0 \end{vmatrix}$$



(a) 流线

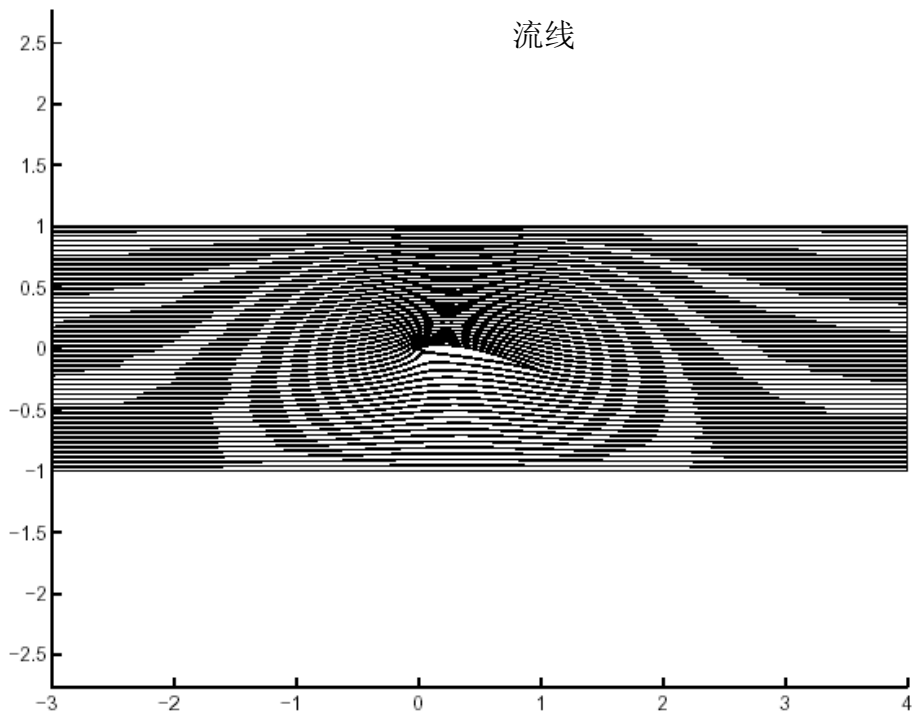
流函数



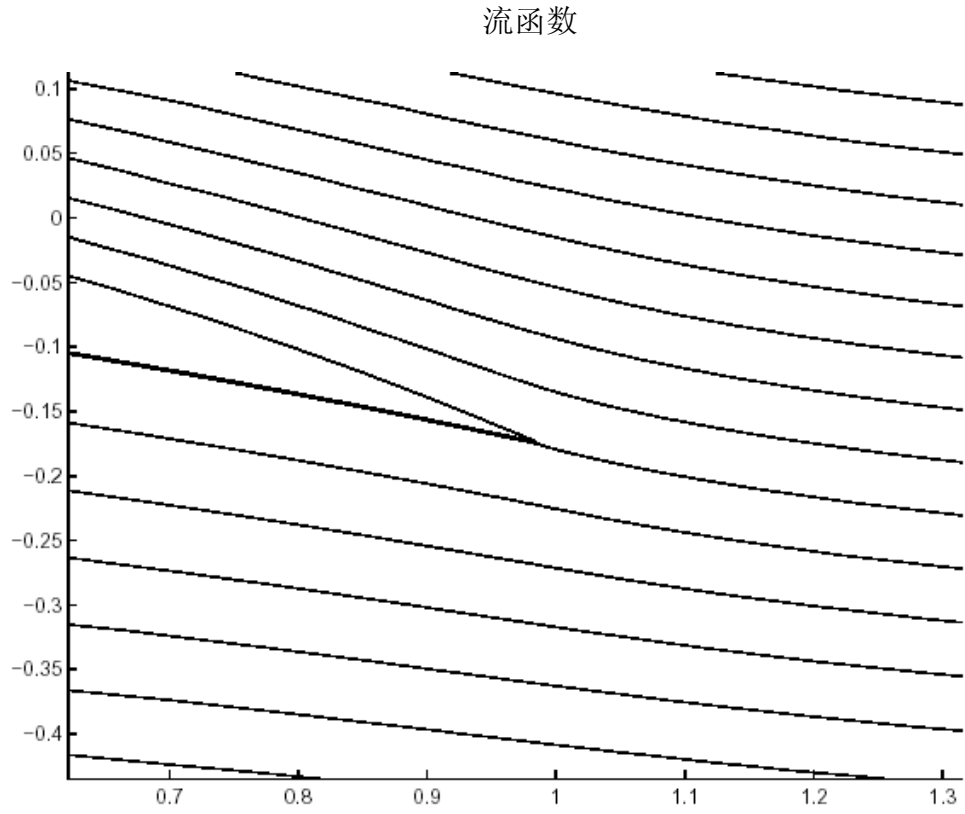
(b) 后缘附近的流线。

图 6: NACA 4408 情形, $\alpha=0$ 度时的流线。

流线

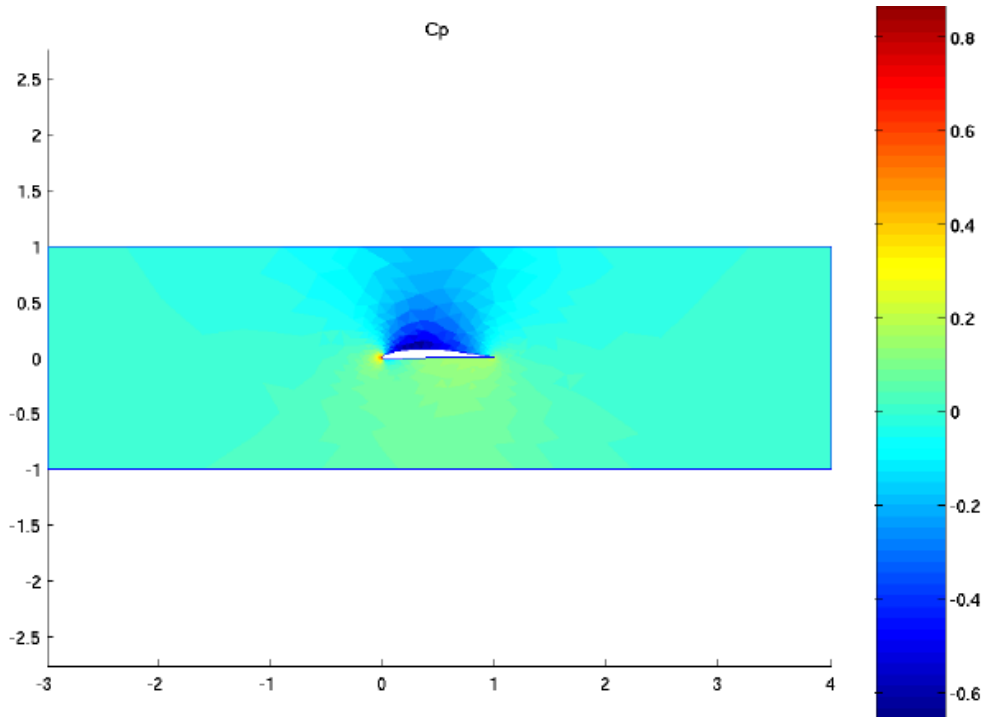


(c) 流线

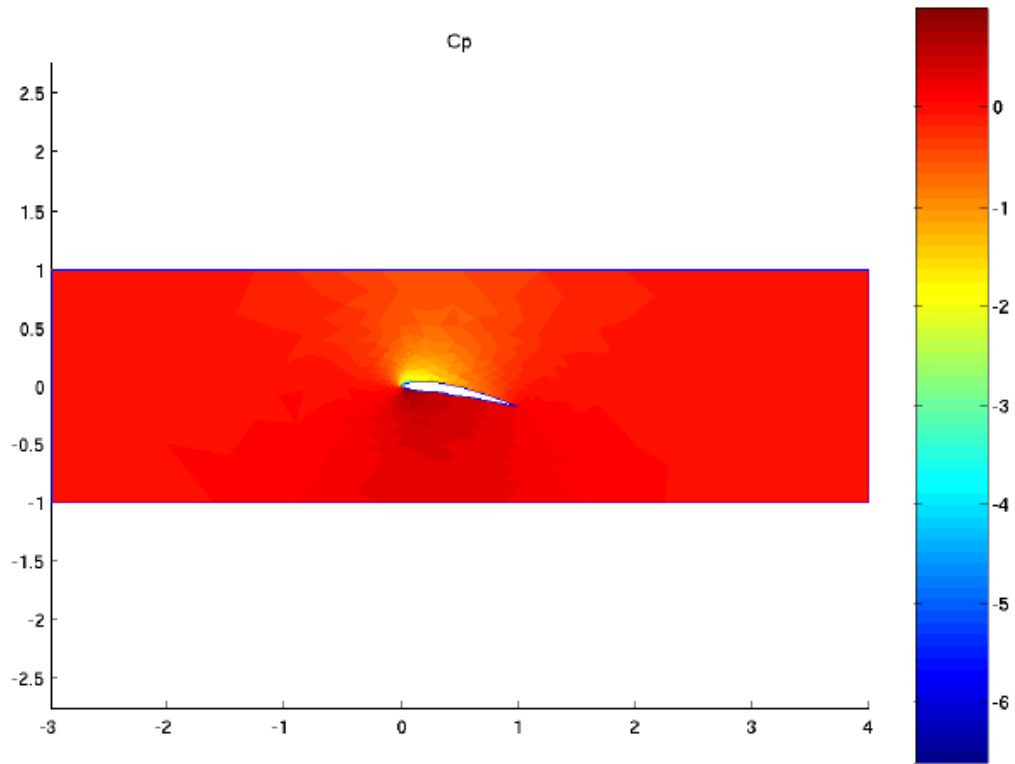


(d) 后缘附近的流线。

图 7: NACA 4408 情形, $\alpha=10$ 度时的流线。



(a) $\alpha = 0$ 度



(b) $\alpha = 10$ 度

图 8: NACA 4408 情形时的 C_p .

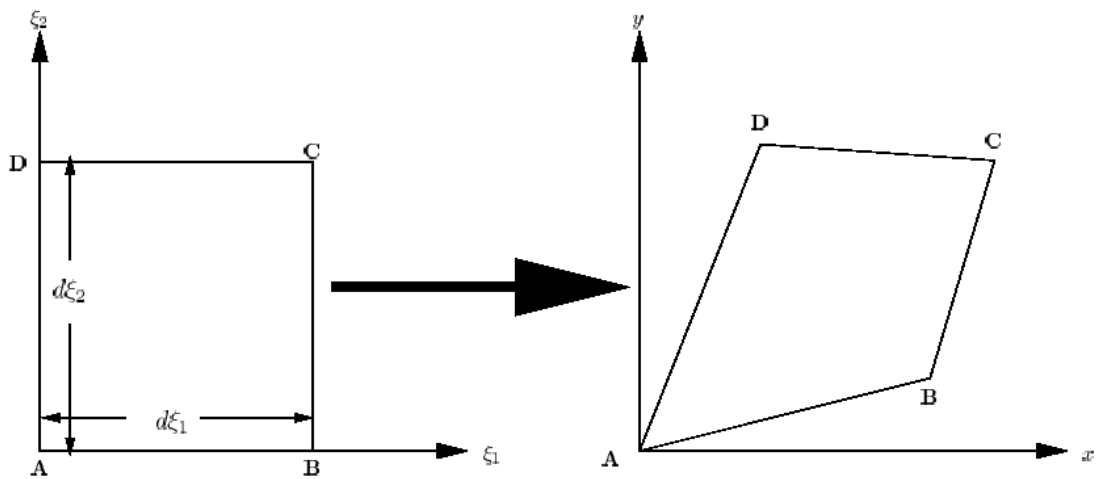


图 9 梯形微分面元。

最后，计算行列式给出，

$$dA = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \right| d\xi_1 d\xi_2,$$

证明了所需结果。

2.5 单点高斯积分的导出 (10%)

对于 ξ -平面内顶点在(0,0),(1,0)和(0,1) 的参考元素, 考虑下面的单点高斯积分法,

$$\iint_{T_{ref}} g(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx \frac{1}{2} g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

我们将证明这个积分对于任何 ξ_1 和 ξ_2 的线性函数

$$g(\xi_1, \xi_2) = c_0 + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2,$$

精确成立。但对一般的双线性函数

$$g(\xi_1, \xi_2) = c_0 + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_{12} \xi_1 \xi_2,$$

不成立。其中 c_0 , c_1 和 c_{12} 是常数。

我们先对一般的双线性形式进行积分,

$$\begin{aligned} \iint_{T_{ref}} g(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} (c_0 + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_{12} \xi_1 \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_0^1 \left[c_0(1-\xi_2) + \frac{1}{2} c_1 (1-\xi_2)^2 + c_2 \xi_2 (1-\xi_2) + \frac{1}{2} c_{12} (1-\xi_2)^2 \xi_2 \right] d\xi_2 \\ &= \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{6} c_1 + \frac{1}{6} c_2 + \frac{1}{24} c_{12}. \end{aligned}$$

用以上给出的高斯积分法, 积分的近似值为

$$\iint_{T_{ref}} g(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{6} c_1 + \frac{1}{6} c_2 + \frac{1}{18} c_{12}.$$

因此, 它对于任意的 c_0 , c_1 和 c_2 的精确积分值都是符合的, 但对于双线性项 c_{12} 则不然。