16：901 概率论方法实例

——涡轮叶片中的热传导问题示范解

1. 背景知识

在涡轮工作的第一个阶段，叶片受燃烧室里的热气体产生的高温气流影响。因此，涡轮叶片常通过泵入叶片通道中的低温空气进行内部冷却。在这一实例中，。我们将利用 project 3 中建立的有限元热传导分析方法，定量讨论涡轮叶片中温度不确定带来的影响。这种叶片以及我们所考虑的问题在大型涡轮发动机中是非常典型的。

热传导方程是关于温度的扩散方程，

$$\nabla^2 T=0$$

而传热率可由以下方程得出，

$$\vec{q}=-k\nabla T$$

其中 k 是叶片材料的热传导率。边界条件为对流传热条件，对叶片表面，传出的热流为：

$$\vec{q}\cdot\vec{n}=h_{ext}(T-T_{ext})$$

这里 h_{ext} 为对流传热系数，T_{ext} 为叶片外部的温度。注意 $\vec{n}$ 为叶片的外法线方向单位矢量，因此 $\vec{q}.\vec{n}$ 代表流出叶片的热流。对冷却通道其热流也是类似的，

$$\vec{q}\cdot\vec{n}=h_{\text{int}}(T-T_{\text{int}})$$

同样，$\vec{n}$ 为叶片的外法线方向单位矢量(指向冷却通道)，因此 $\vec{q}.\vec{n}$ 代表流出叶片的热流。

对于概率分析方法，我们只用了粗糙的网格(g0012coarse.mat)，因为用这种网格与用最细致的网格计算出来的温度只相差几度。注意，这里已经利用弦长 L 将叶片的尺度无量纲化。因此，坐标值实际为 x/L 和 y/L。在这个实例中，你还需要知道翼弦长的取值

$$L=0.1m$$

剩下所有的输入参数都有不确定性。由于概率分析方法是在涡轮设计的前期

进行，可用的信息十分有限，因此我们将使用三角概率密度函数。表 1 给出了每个参数的最大和最小值。我们假设所有参数的最可几点为最大值和最小值的中点。

参数	最小值	最大值
$T_{ext}(C)$	1200	1400
$h_{ext}(W/m^2C)$	2000	4000
$\mathrm{T}_{\mathrm{int}}(C)$	150	250
$h_{ext}(W/m^2C)$	500	1500
$k(W/mC)$	20.0	23.0

表 1：输入参数不确定性说明。最可几值假设为最大值与最小值的中值。

2. 任务

2.1 对称三角分布的积累概率密度函数和百分位数

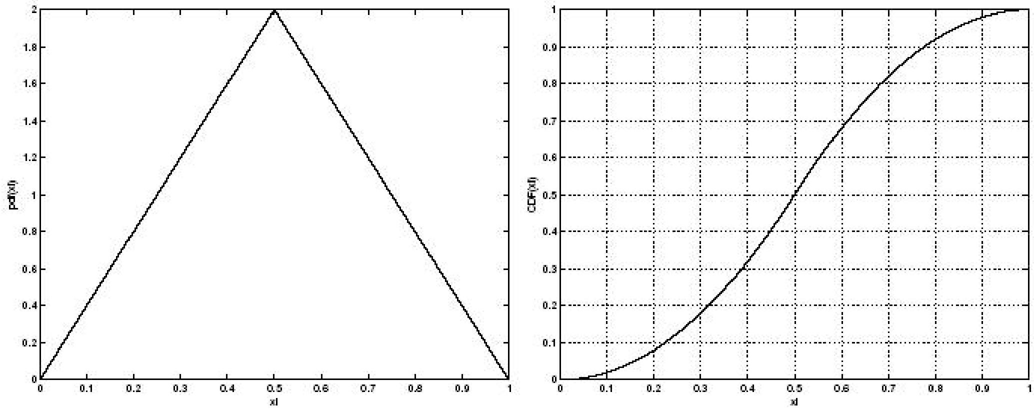
这里的任务是推出在这一实例中进行蒙特-卡洛模拟所需要的积累概率密度函数（CDF）和百分位数（即CDF的逆）。输入的分布都是对称三角分布，且对随机的输入变量x，其最大值(即x_{max})和最小值(x_{min})都是已知的。首先定义一个无量纲的随机变量差分，

$$\xi = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$$

随机变量在ξ=0 的时候取最小值，ξ=1 时达到最大。ξ=0.5 时为其最可能值。由于整个概率分布积分后必须等于 1，因此最可几点处的概率密度必须为 2（这样才能保证在三角分布的概率密度曲线下的面积为 1）。概率密度函数为：

$$PDF(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi<0 \\ 4\xi & 0<\xi<0.5 \\ 4(1-\xi) & 0.5<\xi<1 \\ 0 & \xi>1 \end{cases}$$

如图 1(a)所示。



(a) Probability density of ξ　　(b) Cumulative distribution function of ξ

图 1：对称三角分布的概率密度函数(PDF)和概率函数(CDF)

将 PDF 积分得到 CDF，

$$CDF(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} PDF(\xi) d\xi$$

对ξ<0，CDF=0。对 0<ξ<0.5，积分为：

$$CDF(\xi) = \int_{0}^{\xi} 4\xi d\xi = 2\xi^2 \tag{1}$$

对 0.5<ξ<1，积分为：

$$CDF(\xi) = 0.5 + \int_{0.5}^{\xi} 4(1-\xi) d\xi = 1 - 2(1-\xi)^2 \tag{2}$$

对ξ>1，CDF 为 1。CDF 的曲线见图 1(b)。

对一个给定的 CDF 值 u，要确定ξ，我们需要求出 CDF 的逆函数。对 u<0.5，变换方程(1)得到：

$$\xi = \sqrt{\frac{u}{2}}$$

对 u<0.5，变换方程(2)得到：

$$\xi = 1 - \sqrt{\frac{1-u}{2}}$$

最后根据给定的ξ取值，可以由下式确定 x 的值：

$$x = x_{\min} + (x_{\max} - x_{\min})\xi$$

2.2　标称模拟

模拟标称的条件，即所有输入参数取最可能值时，给出叶片温度的最小值和最大值为，

$$T_{\min} = 913.7℃ \qquad T_{\max} = 1299.8℃$$

2.3　蒙特-卡洛模拟

概率分析是建立在蒙特-卡洛模拟基础上的。注意，假设每一个冷却通道中的温度和换热系数的都彼此相等。因此，尽管这些参数的值是不确定的，但是对特定的模拟，它们在每一个通道中的值都是相等的。实质上，由于叶片通道中的热流由同一个源产生，因此我们有理由认为这些值高度相关。然而，通道间必然存在某种随机性，而当前的分析并没有考虑由此带来的影响。

对 1000 个样本进行模拟的结果如图 2-5 所示。$T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的平均值分别为 914.7℃和 1298.5℃。显然，这些温度值与标称值很接近，并且在 2.5 节得到的 95%的置信度范围内。平均值与最标称值相似，这样的结果可能预示着温度的响应与随机输入变量线性相关。

我们也注意到叶片中的平均温度分布显示了位于机翼前缘和后缘区域的最高温度，这从 Project 3 中的确定性分析可以看到。温度分布的标准偏差表明温度变化最大处位于叶片的中间，远离热的机翼前后缘。

2.4　$T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的分布

图 3 中 $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的分布情况表明 $T_{\min}$ 为近似的正态分布，而 $T_{\max}$ 似乎接近三角分布。更进一步，显然 $T_{\max}$ 的范围就是叶片外部温度分布的范围。在前一个实例中可以看到，叶片中温度的最大值发生在机翼前后缘区域，并且，由于在这些区域缺乏冷却，叶片也很薄，温度的最大值就等于外部温度的值。

$T_{\min}$ 的分布接近正态分布的原因是类似中心极限定理的效应。特别地，假设 $T_{\min}$ 的值可以用随机输入变量的线性函数很好地近似：

$$T_{\min} \approx a_0 + a_1 T_{ext} + a_2 h_{ext} + a_3 T_{\mathrm{int}} + a_4 h_{\mathrm{int}} + a_5 k$$

这种情况下，$T_{\min}$ 是五个同分布的加权随机变量的和。因此，尽管对随机输入而言 N=5 是一个小数字，我们还是期待着它的分布会接近一个正态分布。注意，由于 $T_{\max}$ 主要只受 T_{ext} 的影响，这暗示着对 $T_{\max}$ 做类似的线性近似时，$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$。这种情况下，$N$=1，我们将看不到中心极限定理效应。

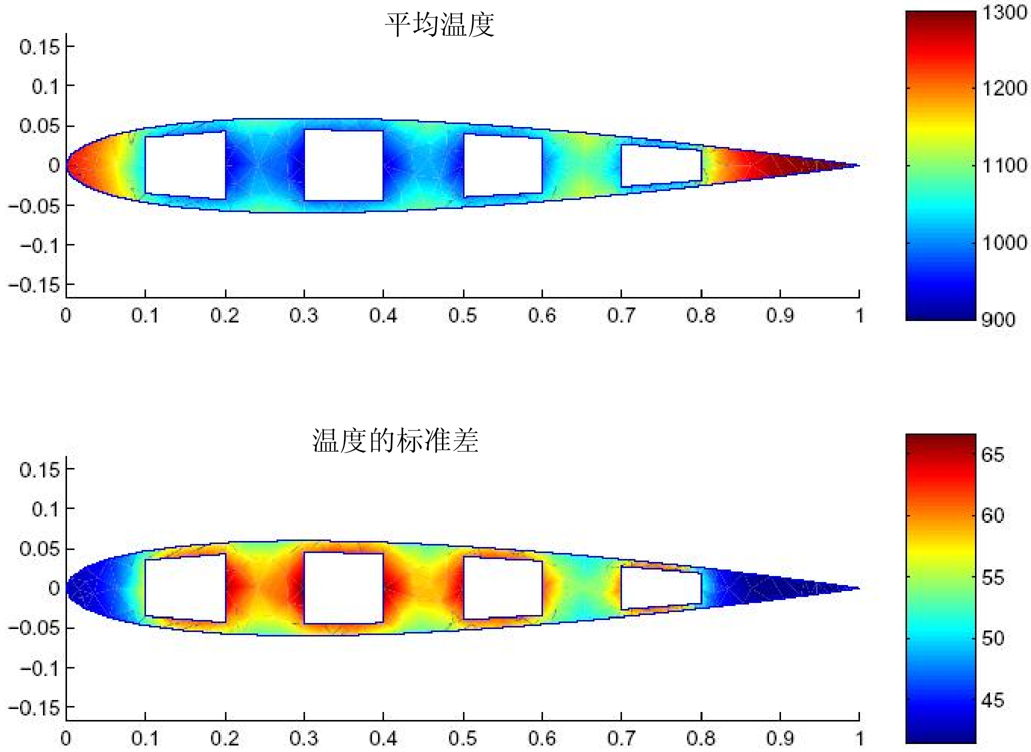


图 2：对 1000 个样本进行蒙特-卡洛模拟得到的平均温度和其标准偏差的分布

2.5 误差估计

首先， 我们注意到对 1000 个样本进行蒙特-卡洛模拟的结果给出 $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的平均值和标准偏差为：

$$\bar{T}_{\min} = 914.7°C \quad s_{T_{\min}} = 65.9°C \quad \bar{T}_{\max} = 1298.5°C \quad s_{T_{\min}} = 41.2°C$$

如讲义笔记中所描述的，平均值和标准偏差的标准误差为

$$\text{平均值的标准差} = \sigma_{\bar{T}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}}$$

$$\text{标准差的标准差} = \sigma_{s_T} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{2N}}$$

由于误差估计值为正态分布，因此 2 倍标准偏差处的置信度为 95%。因此，95%

置信水平给出的结果为：

$$\mu_{T_{\min}} = 914.7 \pm 4.2°C$$
$$\sigma_{T_{\min}} = 65.9 \pm 2.9°C$$
$$\mu_{T_{\max}} = 1298.5 \pm 2.6°C$$
$$\sigma_{T_{\max}} = 41.2 \pm 1.8°C$$

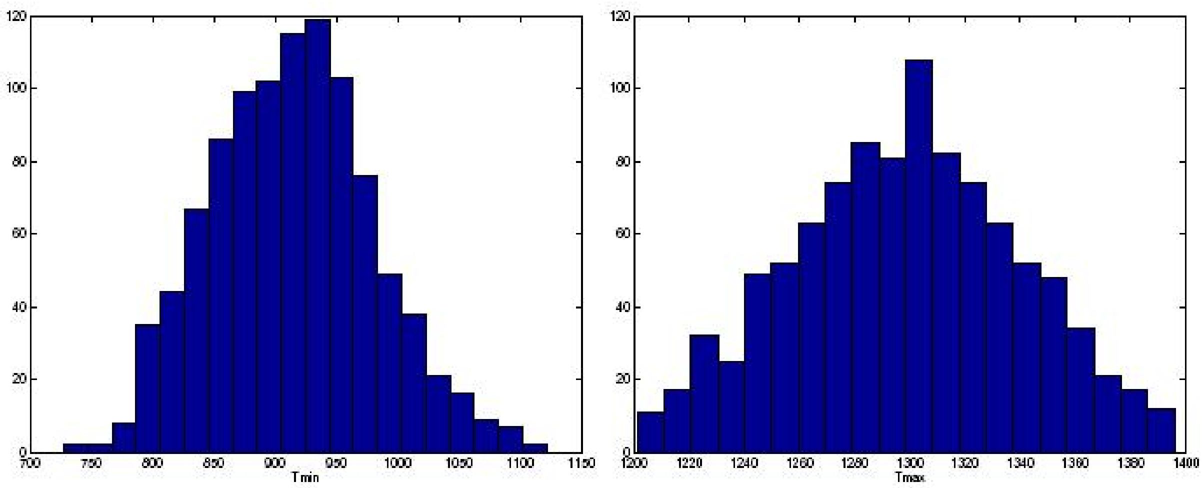
为了使得温度的平均值的偏差在95%的置信度下不超过1℃，必须满足以下条件：

$$2\frac{\sigma_{T_{\min}}}{\sqrt{N}} < 1$$
$$2\frac{\sigma_{T_{\max}}}{\sqrt{N}} < 1$$

由于$T_{\min}$的偏差最大，他要求的 N 应该最大。

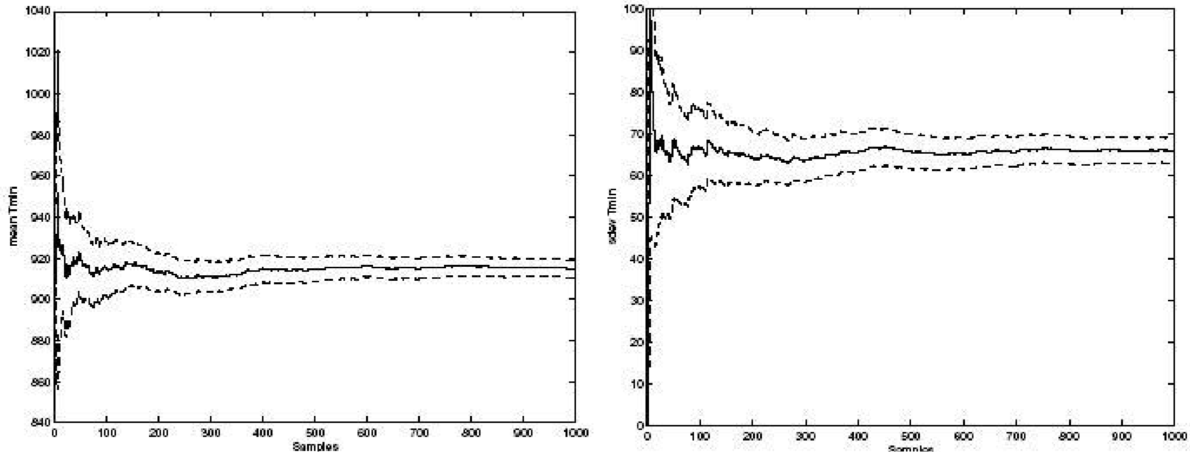
$$N > 4\sigma_{T_{\min}}^2 = 17371$$

这样，我们需要大约 17000 个样本，才能使得最小温度平均值的分辨小于 1℃。



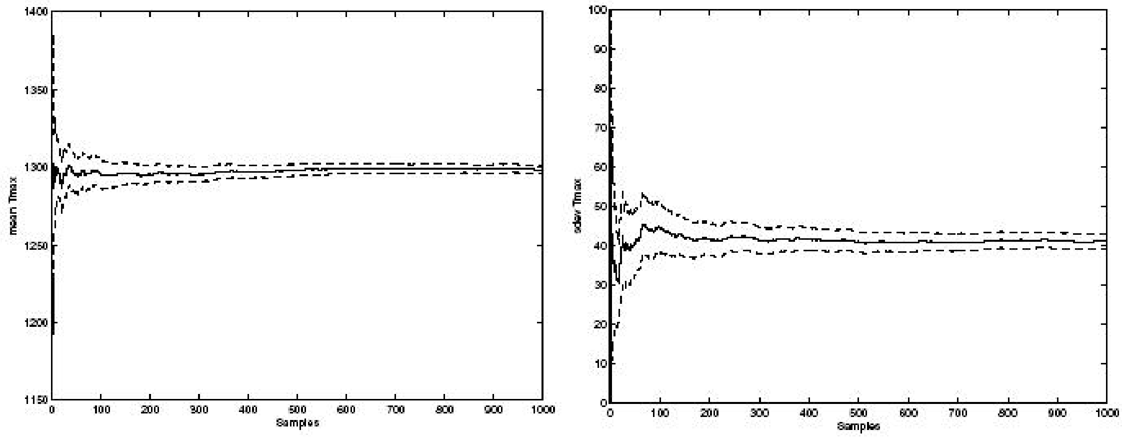
(a) $T_{\min}$ 分布　　(b) $T_{\max}$ 分布

图 3：对 1000 个样本进行蒙特-卡洛模拟得到的$T_{\min}$和$T_{\max}$的分布(直方图)



（a）$T_{\min}$ 的平均值的收敛性　　（b）$T_{\min}$ 的标准偏差的收敛性

图 4：$T_{\min}$ 的平均值和标准偏差的收敛性，虚线为 95%置信度范围。



（a）$T_{\max}$ 的平均值的收敛性　　（b）$T_{\max}$ 的标准偏差的收敛性

图 5：$T_{\max}$ 的平均值和标准偏差的收敛行为，虚线为 95%置信度范围。