

# 16.609 家庭作业 #2

## 示范解

### 1. 背景知识

模拟飞机的动力学是非常复杂的。要描述它的运动需要 12 个状态变量：包括三个位置量，三个速度量，三个角方向量和三个角速度量。但是，如果我们做一些假设，并同时包含这 12 个相互耦合的参量的微分方程线性化，问题就可以大大简化。经过简化后我们将得到两个退耦的四状态系统，其中一个描述纵向运动，一个描述横向运动。

纵向模式甚至可以被进一步简化，在熟知的 **pheugoid** 模式和短周期模式下仍可得到相当精确的退耦模型。横向系统由于以下三种运动模式而很难简化：飘摆模式，螺旋模式和旋转模式。飘摆模式是偏航和旋转振动的结合。旋转模式中的旋转速度很快可以达到稳态。螺旋模式有可能有略微的稳定或者不稳定。不稳定的螺旋模式会导致飞机偏离其航线或者螺旋式俯冲。这三种水平模式将是第一个实例的内容，也是这节家庭作业的大部分问题的基础。

#### 1.1 坐标系统及变量的定义

飞机的运动要通过某种相对静止的框架来测量，然而，我们通常只知道飞机相对于机身坐标系的性质。因此，我们需要确定的状态是机身的相对位置，运动旋转角度和角速度。图 1 画出了相对于机身坐标系  $(x_b, y_b, z_b)$  的力  $(X, Y, Z)$ ，力矩  $(L, M, N)$  和转动角速度  $(p, q, r)$ 。

表 1 给出了相关变量的定义。线性化的运动方程是关于稳定性导数以及力和力矩关于状态的一阶导数的方程。这些导数都用下标的形式表示。如， $Y_\beta \equiv \frac{\partial Y}{\partial \beta}$ 。通常，稳定性导数都给出的是无量纲形式，如  $C_{Y_\beta}$  为  $Y_\beta$  的无量纲形式。特别注意，表 2 中的定义都是很常用的，而且在作业和实例中也会用到。表 3 给出了作业和

实例中我们要研究的飞机的稳定性导数的值和维数。

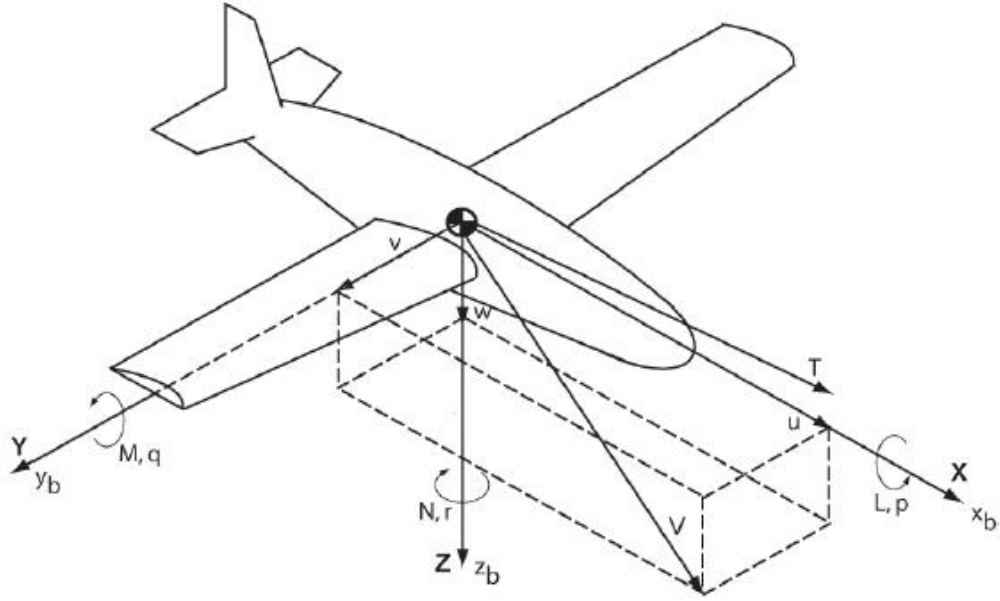


图 1: 固定在机身上的坐标系的定义

	符号	描述
状态	$\Delta\beta$	侧向滑动角扰动
	$\Delta p$	旋转速度扰动
	$\Delta r$	偏航速度扰动
	$\Delta\phi$	旋转角扰动
力和力矩	$Y$	侧向力(y 方向的力)
	$L$	旋转力矩(绕 x 轴的力矩)
	$N$	偏航力矩(绕 z 轴的力矩)
其他量	$Q$	动压
	$S$	(机翼)平面形状面积
	$b$	翼展
	$W$	飞机重量
	$m$	飞机质量
	$I_x, I_y, I_{xz}$	惯性力矩
	$g$	重力加速度
	$M_0$	马赫数
	$h_0$	高度
	$u_0$	x 方向初始速度

表 1: 变量注释

$Y_\beta = QSC_{y\beta}$	$L_\beta = Q Sb C_{l\beta}$	$N_\beta = Q Sb C_{n\beta}$
$Y_p = \frac{Q Sb}{2u_0} C_{yp}$	$L_p = \frac{Q Sb^2}{2u_0} C_{lp}$	$N_p = \frac{Q Sb^2}{2u_0} C_{np}$
$Y_r = \frac{Q Sb}{2u_0} C_{yr}$	$L_r = \frac{Q Sb^2}{2u_0} C_{lr}$	$N_r = \frac{Q Sb^2}{2u_0} C_{nr}$

表 2: 无量纲形式的稳定性导数定义

## 1.2 运动方程

方程(1)-(4)给出了水平运动的线性化方程。方程(1)为  $y$  方向动量守恒方程。方程(2)为  $x$  方向角动量守恒方程。方程(3)为  $z$  方向角动量守恒方程。最后，方程(4)为旋转角与旋转速率的关系。特殊情形下，取控制方程形式如下：

$$(mu_0 \frac{d}{dt} - Y_\beta) \Delta\beta - Y_p \Delta p + (mu_0 - Y_r) \Delta r - mg \Delta\phi = 0 \quad (1)$$

$$-L_\beta \Delta\beta + (I_x \frac{d}{dt} - L_p) \Delta p - (I_{xz} \frac{d}{dt} + L_r) \Delta r = 0 \quad (2)$$

$$-N_\beta \Delta\beta - (I_{xz} \frac{d}{dt} + N_p) \Delta p - (I_z \frac{d}{dt} - N_r) \Delta r = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta\phi = \Delta p \quad (4)$$

量	747 的值	F-104 的值
$C_{y\beta}$	-0.96	-1.17
$C_{yp}$	0	0
$C_{yr}$	0	0
$C_{l\beta}$	-0.221	-0.175
$C_{lp}$	-0.45	-0.285
$C_{lr}$	0.101	0.265
$C_{n\beta}$	0.150	0.50
$C_{np}$	-0.121	-0.14
$C_{nr}$	-0.30	-0.75
$S$	5500 $ft^2$	191 $ft^2$
$b$	195.68 $ft^2$	21.94 $ft^2$
$h$	海平面	海平面
$M_0$	0.25	0.257

$W$	$636600 \text{ lbs}$	$16300 \text{ lbs}$
$I_x$	$18.2 \times 10^6 \text{ slug ft}^2$	$3549 \text{ slug ft}^2$
$I_z$	$49.7 \times 10^6 \text{ slug ft}^2$	$59669 \text{ slug ft}^2$
$I_{xz}$	$0.97 \times 10^6 \text{ slug ft}^2$	$0$

表 3: 波音 747 客机和 F-104 战斗机在海平面上各个量的值

## 2. 作业安排

1. 利用我们课程中已经或将要讨论的数值方法，将方程 (1) - (4) 变为线性系统的正则状态空间形式，

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中  $\mathbf{A}$  是  $4 \times 4$  矩阵。我们将分两步来做。把不含导数的项移至控制方程的等式右端，导出下列形式的线性系统

$$\mathbf{M} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中  $\mathbf{M}$  叫做 ‘质量矩阵’。特别地，对机翼横向运动方程推出  $\mathbf{M}$  和  $\tilde{\mathbf{A}}$ （注意：不要代入任何数值，保持矩阵的符号形式）。第二步讲 (6) 式乘以  $\mathbf{M}^{-1}$  将给出所需方程形式  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$ 。为能使这一步成功，逆矩阵  $\mathbf{M}^{-1}$  必须存在。什么是逆矩阵存在的条件呢？假设矩阵时可逆的，求出  $\mathbf{M}^{-1}$  的解析形式（注意：仍以符号形式表示）

**解答：** 矩阵  $\mathbf{M}$  和  $\tilde{\mathbf{A}}$  为：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} mu_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & -I_{xz} & 0 \\ 0 & -I_{xz} & I_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} Y_\beta & Y_p & -mu_0 + Y_r & mg \\ L_\beta & L_p & L_r & 0 \\ N_\beta & N_p & N_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

如果一个矩阵可逆（即非奇异），矩阵的各列须线性无关。矩阵可逆的一

个等价的且更容易的检查办法是其行列式须非零。这里我们将用行列式检查，因为这可能是最简单的。 $\mathbf{M}$  的行列式为：

$$\det \mathbf{M} = mu_0 (I_x I_z - I_{xz}^2).$$

因此，欲使行列式非零，要求  $mu_0 \neq 0$  和  $I_x I_z - I_{xz}^2 \neq 0$ 。显然，当飞机具有质量并且运动时，第一个条件是满足的。稍查一下动量和惯量便知第二个条件也满足。因此两种飞机的质量矩阵均可逆。 $\mathbf{M}^{-1}$  的解析形式为：

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{mu_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_z/D & I_{xz}/D & 0 \\ 0 & I_{xz}/D & I_x/D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中  $D = I_x I_z - I_{xz}^2$ 。

2. 代入指定的数据，对两种飞机求特征根和特征向量。特征根和特征向量分别相应于旋转状态，螺旋状态和飘摆状态。说明特征根和特征向量分别显示了各种飞机在不同模式下的什么动力学特征。特别要评论模式的稳定性和和各种模式状态的相对数量级。这些飞机的动力学是否为刚性的（等价于回答此问题）？

**解答：**第一，我们注意到，采用标准大气数据，海平面的声速和密度为：

$$a_{0ft} = 1116.45 \text{ ft/s} \quad \rho_{0ft} = 2.3769 \cdot 10^{-3} \text{ slug/ft}^3.$$

由这些值和飞行的马赫数，可以计算两种飞机的速度和动力学压力。于是，利用 Matlab 命令，得到波音 747 的 A 矩阵特征值和特征向量为：

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-1.0062, -0.0460, -0.0264 + 0.6806i, -0.0264 - 0.6806i).$$

$$(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_3 | \mathbf{r}_4) =$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 0.1261 & 0.0486 & 0.2633 - 0.3563i & 0.2633 + 0.3563i \\ 0.7228 & -0.0456 & -0.0189 + 0.4865i & -0.0189 - 0.4865i \\ 0.0451 & 0.1123 & -0.1764 - 0.1570i & -0.1764 + 0.1570i \\ -0.6779 & 0.9914 & 0.7148 & 0.7148 \end{array} \right)$$

F-104 的特征值和特征向量为：

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-1.7893, -0.0064, 0.0679 + 2.0763i, 0.0679 - 2.0763i).$$

$$(r_1 | r_2 | r_3 | r_4) = \begin{pmatrix} -0.0196 & 0.0064 & -0.0666 - 0.0817i & -0.0666 + 0.0817i \\ -0.8725 & -0.0006 & 0.8799 & 0.8799 \\ 0.0227 & 0.1105 & -0.1531 + 0.1091i & -0.1531 - 0.1091i \\ 0.4876 & 0.9939 & 0.0142 - 0.4233i & 0.0142 + 0.4233i \end{pmatrix}$$

两种飞机的特征向量已经排了序，所以模式的物理意义相同。特别有，第一种模式是旋转模式，因为各种飞机的第一个特征向量在第二个状态量（相应于旋转率的扰动 $\Delta p$ ）和第四个状态量（相应于旋转角的扰动 $\Delta\phi$ ）中是主导的（即有着最大的量级），因此这是可以被确定的。并且，旋转模式通常会被很好地抑制，这一点对两种飞机都是显然的（即 $\lambda_1$ 是负实数）。

第二个特征向量相应于螺旋状态，因为它主要影响旋转角的扰动和（在较小程度上）偏航率。注意：这种模式对（在第一行的）侧滑角影响较小，说明飞机的鼻头仍然紧沿着其航向。而且，这一模式的特征值量级较小，747 的稍稳定些（ $\lambda_2 = -0.0462$ ），F-104 则稍不稳定些（ $\lambda_2 = 0.0006$ ）。

第三、四个特征向量相应于摆动的飘摆状态，它是四个状态的耦合。模式的摆动状态表现在第三、四个特征值为复数。但是，在 747 种，特征根的实部是负数，所以其飘摆状态是稳定的。然而，F-104 的特征根的实部是正的说明其飘摆状态是不稳定的。

747 的动力学不是刚性的。其最大模的特征值是严重抑制的旋转模式特征值（即 $\lambda_1 = -1.0662$ ），最小模的特征值是轻微抑制的螺旋模式特征值（即 $\lambda_2 = -0.0460$ ），二者之比给出谱条件数大约为 23，所以不是刚性的。

F-104 的动力学稍微有点刚性。其最大模的特征值是摆动的飘摆模式（即 $|\lambda_{3,4}| = 2.0765$ ），最小模的特征值是轻微抑制的螺旋模式（即 $\lambda_2 = 0.0006$ ），二者之比给出谱条件数大约为 3460，说明具有刚性。

3. 用特征值和特征向量，对各种飞机找出在以下初始条件下从  $t=0s$  到  $t=100s$  的分析解。

$$\Delta\beta(0) = 0.1rad, \Delta p(0) = 0, \Delta r(0) = 0, \Delta\phi(0) = 0$$

对各种飞机画出分析解的图。

**解答：** 给定特征值和特征向量，对一般初始条件的分析解具有形式

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mathbf{r}_i \exp(\lambda_i t),$$

其中  $\alpha_i$  是根据初始条件确定的系数（注意：这些系数是复数）。 $\mathbf{u}$  是未知的状态向量。特别指定在  $t = 0$ ，解的形式取为

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mathbf{r}_i. \quad (8)$$

因为  $\alpha_i$  是复数，我们有 8 个未知量要确定（ $\alpha_i$  的实部和虚部）。而 (8) 式看起来是 4 个方程的系统（因为向量有 4 个元素），但实际上它是 8 个方程的系统（ $\mathbf{u}$  的每个元素均有实部和虚部）。由于状态量是物理量，不能取复数， $\mathbf{u}$  的虚部的 4 个方程的虚部可以简单地设为零。为有效起见， $\alpha_i$  对于任何纯实数特征根均设为实的（如飞机动力学问题的模式 1 和 2），而对于任何复共轭特征根对均设为复数的（如飞机动力学问题的模式 3 和 4），权重须为复共轭的。为求  $\alpha_i$ ，把 (8) 式整理为矩阵方程，

$$\mathbf{u}(0) = (\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_3 | \mathbf{r}_4) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

对特征向量矩阵求逆，可以得到未知的权重，

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = (\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_3 | \mathbf{r}_4)^{-1} \mathbf{u}(0)$$

对于波音 747，权重为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0.1008, -0.0303, 0.0688 + 0.0737i, 0.0688 - 0.0737i).$$

对于波音 F-104，权重为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (-0.5485, 0.0004, -0.2720 + 0.3246i, -0.2720 - 0.3246i).$$

两个飞机对于侧滑扰动的响应见图 2 和 3。如前面所讨论的，显然可以看出 747 的响应是稳定的，F-104 则是不稳定的。同时我们注意到，尽管初始扰动仅在侧滑角存在，但是飞机的所有状态量在这个扰动的响应过程中均被扰动。

## 2.2 数值积分方法的分析

1. 对下列方法求出能够合理模拟出飞机的稳定状态的最大时间步长：一阶 Adams-Bashforth 方法，一阶 Adams-Moulton 方法，2 阶龙格-库塔(RK2)方法。对各种方法画出稳定区域并在一张图上标出使用最大时间步长的特征值。

**解答：**数值算法的放大因子依赖于各模式特征值和时间步长的乘积 $\lambda_i \Delta t$ 。即  $g = g(\lambda_i \Delta t)$ 。一个数值算法如果能够正确地模拟一种指定的飞机的稳定性特征，则要求它的时间步长使得所有物理上稳定的模式（即：那些特征根实部为负数的情况）在数值计算中也稳定（即 $|g(\lambda_i \Delta t)| < 1$ ）。并且，要求它的时间步长使得所有物理上不稳定的模式（即：那些特征根实部为正数的情况）在数值计算中也是不稳定的（即 $|g(\lambda_i \Delta t)| > 1$ ）。正如本讲义推导的，向前欧拉方法（即 1 阶 Adams-Bashforth 方法）和向后欧拉方法的放大因子为，

$$g_{FE} = 1 + z, \quad g_{BE} = \frac{1}{1 - z}$$

其中 $z = \lambda_i \Delta t$ 。为求出 $|g| = 1$ 的等高线，令  $g = \exp(i\theta)$ （这给出 $g$ 的模为 1 的所有值）替换增长因子，并求出相应的 $z(\theta)$ 值。对于向前欧拉方法，有：

$$z = \exp(i\theta) - 1.$$

对于向后欧拉方法，有：

$$z = 1 - \exp(-i\theta).$$

对于 2 阶 Runge-Kutta 格式，需导出放大因子。我们利用下面的 2 阶格式：

$$v^* = v^n + \frac{\Delta t}{2} f(v^n, t^n),$$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t f(v^*, t^n + \Delta/2).$$

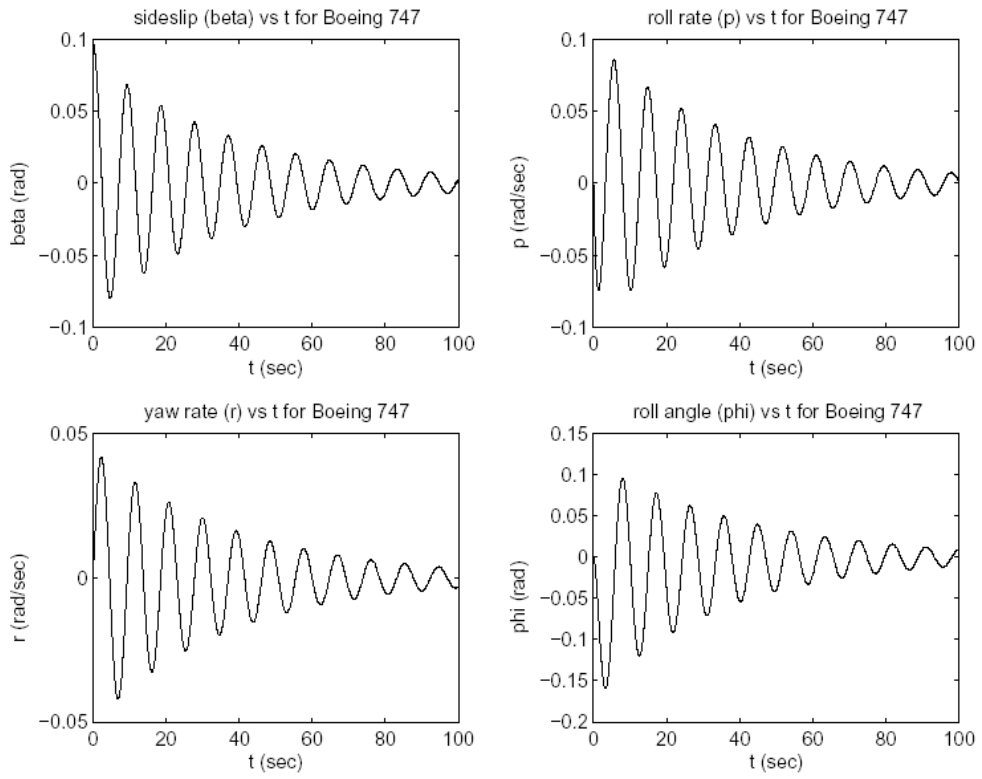


图 2: 波音 747 对一个侧滑角扰动的响应

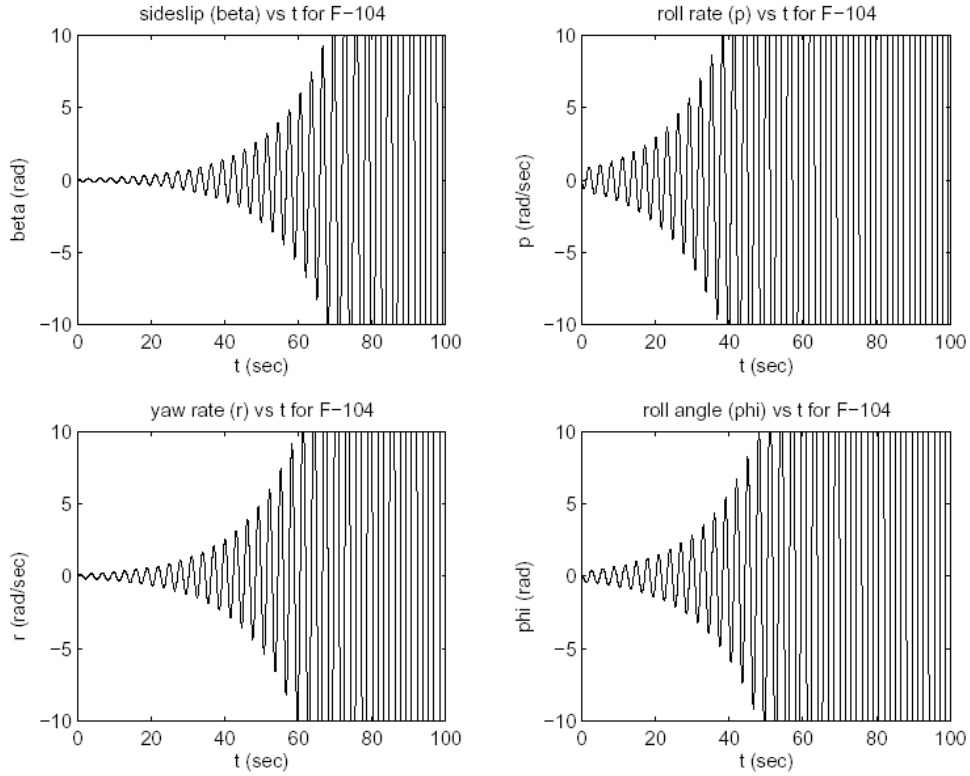


图 3: F-104 对一个侧滑角扰动的响应

对于线性情况  $f = \lambda_i v$ , 算法给出:

$$v^* = v^n + \frac{\Delta t}{2} \lambda_i v^n,$$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t \lambda_i v^*.$$

2 阶方法联立得到  $v^{n+1}$  和  $v^n$  的关系,

$$v^{n+1} = \left[ 1 + \Delta t \lambda_i + \frac{1}{2} (\Delta t \lambda_i)^2 \right] v^n.$$

所以, 2 阶龙格库塔格式的放大因子为,

$$g_{RK2} = 1 + z + \frac{1}{2} z^2.$$

和前面一样, 做替换  $g_{RK2} = \exp(i\theta)$ , 求得  $z$  为

$$z = -1 \pm \sqrt{1 - 2[1 - \exp(i\theta)]}.$$

应用到飞机上, 对数值方法确定所需的时间步长时, 我们在复平面上画出  $|g|=1$  时  $z$  的位置。然后调整时间步长直到某个特征值达到  $|g|=1$  的等高线。例如, 图 4

显示了向前欧拉方法对于 $\Delta t = 0.10$ 秒时 $\lambda_i \Delta t$ 的位置。在这一时间步长，飘摆模式的特征根（一对共轭复数）达到稳定边界。对于任何大一些的时间步长，用向前欧拉方法积分时，模式将数值地增大。注意：向前欧拉方法的稳定边界是一个圆，但图 4 中只有靠近圆点的区域能看到。

对于 F-104，向前欧拉方法在 $\Delta t < 1.11$ 秒时有恰当的稳定边界。在这一时间步长，强抑制的旋转模式达到稳定边界，且对于任何大一些的时间步长都不再稳定。注意：旋转模式和飘摆模式都在稳定边界之外，所以都不稳定。而这和物理系统是一致的（物理系统中这两个模式都不稳定）。

对于向后欧拉方法，747 没有步长限制，它是稳定的飞机。这是因为向后欧拉方法对所有物理量都是稳定的。但是，F-104 的情形则不然，当 $\Delta t > 0.02$ 秒时，不稳定的飘摆模式将进入向后欧拉方法积分器的稳定区域。于是，这些模式将成为在数值模拟中稳定的轭，尽管它们在物理系统中并不稳定。

2 阶龙格库塔算法有一个在左半平面的椭圆形稳定区域。对于 747，时间步长对于 $\Delta t = 1.05$ 秒由飘摆模式达到稳定边界来制约。而 F-104 的时间步长则由抑制的旋转模式达到稳定边界来限制。

所有方法的时间步长限制总结于表 4。

	747	F-104
向前欧拉方法	0.10	1.11
向后欧拉方法	$+\infty$	0.02
2 阶龙格库塔方法	1.05	1.11

表 4:对各种算法保持稳定性特征所需要的 $\Delta t$ （秒）

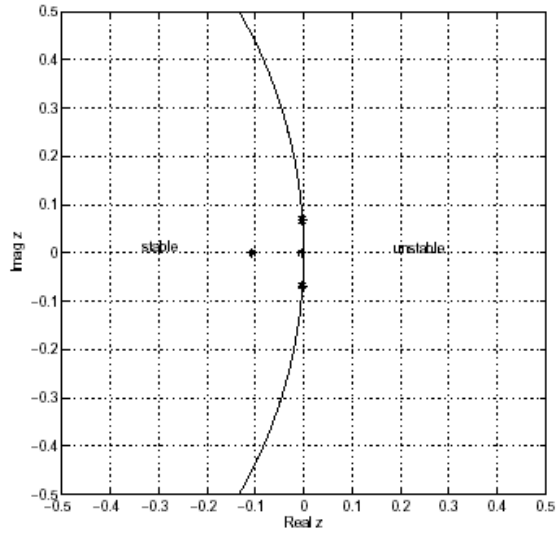


图 4：对于波音 747，在 $\Delta t = 0.10$  秒时，用 $\lambda_i \Delta t$ 表示的向前欧拉方法的稳定区域。

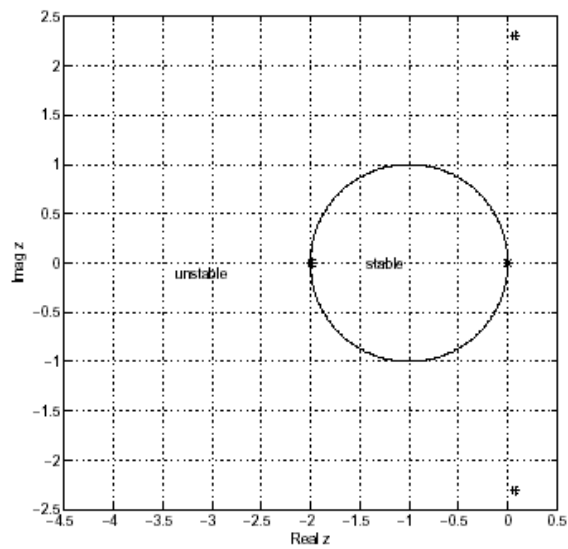


图 5：对于F-104，在 $\Delta t = 1.11$  秒时，用 $\lambda_i \Delta t$ 表示的向前欧拉方法的稳定区域。

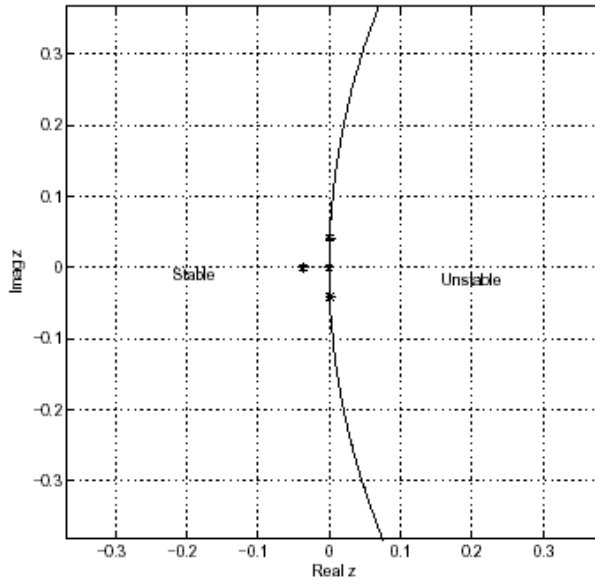


图 6: 对于F-104, 在 $\Delta t = 0.02$  秒时, 用 $\lambda_i \Delta t$ 表示的向后欧拉方法的稳定区域。

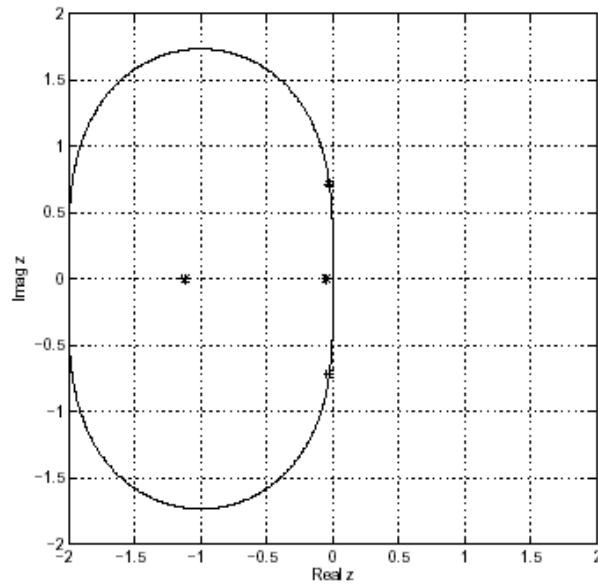


图 7: 对于波音 747, 在 $\Delta t = 1.05$  秒时, 用 $\lambda_i \Delta t$ 表示的 2 阶龙格库塔方法的稳定区域。

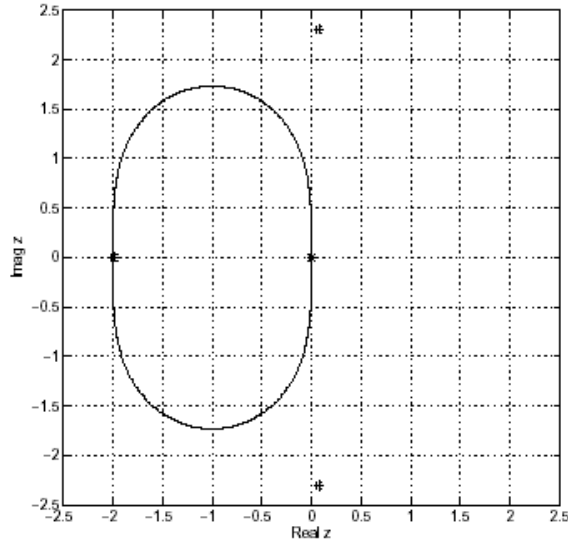


图 8: 对于F-104, 在 $\Delta t = 1.11$  秒时, 用 $\lambda_i \Delta t$ 表示的 2 阶龙格库塔方法的稳定区域。

2. 用上面的结果确定对于各种飞机, 那种计算方法是最有效的。包括你对于各种算法的精度、稳定性和工作量的分析。

**解答:** 首先, 我们注意到向前欧拉方法和向后欧拉方法都是 1 阶精度, 而 2 阶龙格库塔方法为 2 阶精度。因此, 对小的 $\Delta t$ , 我们应期待 2 阶龙格库塔方法在三种方法中有更好的精度。

在计算费用方面, 向前欧拉方法是显式的, 仅需估计一个 $f$ 值。对飞机动力学估计 $f$ 值恰是矩阵和向量的乘积, 因为 $f=Av$  (一个 $M$ -状态系统的矩阵和向量的乘积需要 $O(M^2)$ 个数学运算)。龙格库塔方法也是显式的, 但需估计 2 个 $f$ 值 (每阶算法估计一个)。向后欧拉方法是隐式的, 每一步需要解一个 $M \times M$ 矩阵的方程组。既然矩阵的逆需要 $M^3$ 步运算 (本文中 $M=4$ ), 我们可以估计出向后欧拉方法在一步迭代中的计算量约比显式方法多 $O(M)$ 倍。但在本问题中,  $M$ 很小, 矩阵 $A$ 实际上在数值积分一开始就被求逆并贮存了。尔后, 甚至隐式的算法在每步迭代中也仅需一个矩阵和向量的乘积。因此, 对于我们这个问题, 2 阶龙格库塔方法将加倍昂贵。注意, 对于大的系统(即 $M \gg 1$ ), 求逆和 (或) 储存的代价很高。特别是, 一般矩阵求逆需要 $O(M^4)$ 步运算。

为分析本问题各种算法的有效性，我们需要同时估计精度和运算量。从 $t=0$ 到 $T_f$ ，一个达到指定精度的模拟所需的总工作量应该是工作量除以算法的迭代时间，再乘以迭代次数：

$$W_{total} = w_{iter} \times \frac{T_f}{\Delta t}. \quad (9)$$

对于小的步长，我们可以用截断误差分析进行不同算法的精度分析。如上面讨论的，向前和向后欧拉方法的截断误差是 $O(\Delta t)$ ，而2阶龙格库塔方法的是 $O(\Delta t^2)$ 。因此，对于小步长，这些方法的误差可以写作：

$$\begin{aligned} E_{FE} &= C_{FE} \Delta t \\ E_{BE} &= C_{BE} \Delta t \\ E_{RK2} &= C_{RK2} \Delta t^2 \end{aligned}$$

其中 $C_{FE}, C_{BE}, C_{RK2}$ 是不依赖于 $\Delta t$ 的常数。于是，对于给定的误差容许度 $E_{tol}$ ，我们可以对这些方法估计所需的步长：

$$\begin{aligned} \Delta t_{FE} &= E_{tol} / C_{FE} \\ \Delta t_{BE} &= E_{tol} / C_{BE} \\ \Delta t_{RK2} &= \sqrt{E_{tol} / C_{RK2}} \end{aligned}$$

如上面讨论的，在这个飞机动力学问题中，不同方法每次迭代的工作量大致为：

$$\begin{aligned} w_{FE} &= w \\ w_{BE} &= w \\ w_{RK2} &= 2w \end{aligned}$$

其中 $w$ 定义为做一次向前欧拉方法的迭代的工作量。结合时间步长和每次迭代工作量的估计，我们可以写出各种方法的总工作量估计：

$$\begin{aligned} W_{FE} &= w T_f C_{FE} / E_{tol} \\ W_{BE} &= w T_f C_{BE} / E_{tol} \\ W_{RK2} &= 2w T_f \sqrt{C_{RK2} / E_{tol}} \end{aligned}$$

显然，对于给定的精度，一阶格式所需的工作量比二阶龙格库塔需要的工作量增长得快的多。例如，龙格库塔需要的工作量和向前欧拉法需要的工作量的比为

$$\frac{W_{RK2}}{W_{FE}} = \frac{2\sqrt{C_{RK2}}}{C_{FE}} \sqrt{E_{tol}}.$$

因此，对于较高的精度（亦即较低的 $E_{\text{tol}}$ ），龙格库塔格式比向前（或向后）欧拉方法要有效得多。

上面工作量估计中唯一没谈及的是，龙格库塔算法所允许的时间步长可能会由于问题刚性的限制而非常的小。对于波音 747 的例子，稳定性极限没有严格地限制 2 阶龙格库塔方法。因而，尽管向后欧拉方法对步长没有限制，我们仍然认为这个精度需要小步长。特别对于本例，为了正确模拟 F-104 部稳定的物理模式，向后欧拉方法的步长要很小。