

16.901 有限差分 PDE 方案

燃烧室衬垫温度气膜冷却的影响

示范解答

David L. Darmofal

1 背景知识

在燃烧室基本区域内的温度是显著地高于大部分未经特殊耐热处理的材料可承受的温度的。于是，燃烧室设计的一个关键点就是找出一种冷却燃烧室衬垫壁的方法，使衬垫温度充分低于其材料的耐受极限。一种典型的使燃烧室衬垫冷却的方法是借助气膜冷却。气膜冷却是将气体事先从主流通道导入燃烧室，然后沿着衬垫表面重新放出，形成一层较冷的气体膜来保护衬垫。

在这个项目里，你要模拟气流和衬垫壁来估计气膜冷却技术的有效性，与此相关的模型见图 1。指定的参数列于表 1。假设进入燃烧室内的气体的我们感兴趣的参数范围在 $x=0$ 时满足：

$$\text{对 } x=0, y > h \quad : U = U_{hot}, T = T_{hot}.$$

$$\text{对 } x=0, 0 < y \leq h \quad : U = U_{cool}, T = T_{cool}.$$

$$\text{对 } x=0, -t_w \leq y \leq 0 \quad : U = 0, T = T_{cool}. \quad (\text{注意：在衬垫壁内没有对流})$$

$$\text{对 } x=0, y < -t_w \quad : U = U_{cool}, T = T_{cool}.$$

通过此区域的速度仅在 x 轴方向，且由进气口的值给定，即：

$$U(x, y) = U(0, y), \quad V(x, y) = 0.$$

本模型的基本控制方程将是个对流—扩散方程，且将包括一个可变的热传导以操纵气流和衬垫壁之间的传导变化。因此，在整个感兴趣的范围内的基本控制方程为：

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

在燃烧区域的出口，我们用“抛物型”方程的形式。这里假设 x 的二阶导数与 y 的二阶导数相比很小。

$$\text{在 } x = L, \quad U \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

2 任务

2.1 非均匀格点间隔的有限差分近似

为有效地研究气膜冷却问题，需要在衬垫附近区域划分较细的 y -间隔网，而在远离衬垫的区域划分较粗的 y -间隔网。于是， y -间隔就是指标 j 的函数：

$$\Delta y_{j+\frac{1}{2}} \equiv y_{j+1} - y_j$$

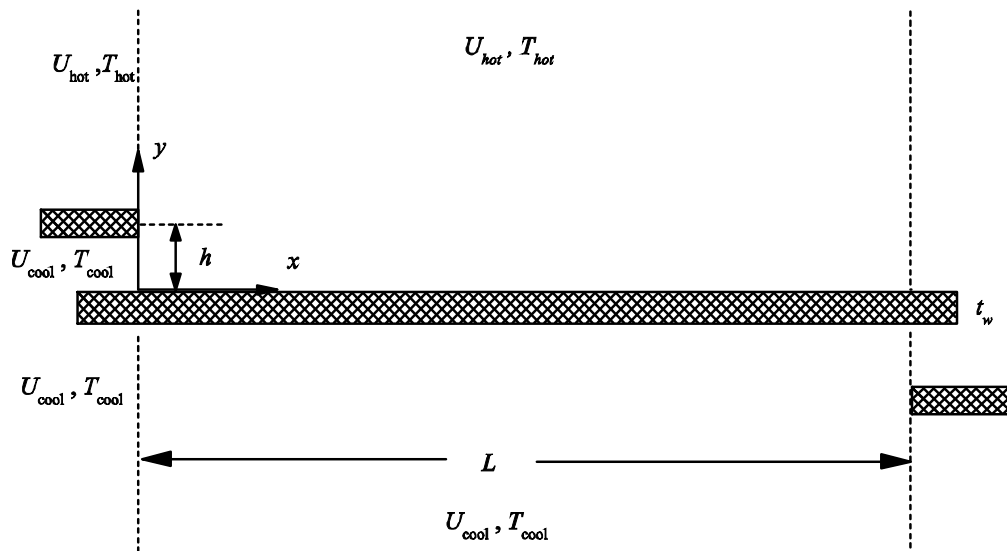


图 1: 带冷却膜的燃烧室衬垫

参数	定义	值
k_g	气体传导率	0.1W/(m K)
k_w	壁传导率	26.0W/(m K)
h	冷却通道高度	0.001-0.005 m
L	冷却通道之间的轴向长度	0.3 m
U_{hot}	热流速度	100 m/sec
U_{cool}	冷流速度	50-250 m/sec
T_{hot}	热流温度	2200 K
T_{cool}	冷流温度	800 K
t_w	衬垫壁厚度	0.0015 m

表 1: 参数定义和取值

在 x 轴方向，保持不变的间隔 Δx . 用台劳展开，可得 a 和 b 的值，使得

$$\frac{a \left(k \frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} \right) - b \left(k \frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \right)}{\frac{1}{2} \left(\Delta y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \right)} \quad (1)$$

等于 $\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$ 在第 j 个位置的近似。注意，记号 $k_{j+\frac{1}{2}}$ 定义为

$$k_{j+\frac{1}{2}} = k \left[\frac{1}{2} (y_j + y_{j+1}) \right].$$

为求此解,我们注意到台劳级数给出:

$$k_{j+\frac{1}{2}} \frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} = k_{j+\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} \Delta y_{j+\frac{1}{2}}^2 \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \Big|_{j+\frac{1}{2}} + \text{H.O.T.} \quad (2)$$

$$k_{j-\frac{1}{2}} \frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} = k_{j-\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} \Delta y_{j-\frac{1}{2}}^2 \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \Big|_{j-\frac{1}{2}} + \text{H.O.T.} \quad (3)$$

其中 H.O.T.代表高阶项。另外，我们可以展开关于节点 j 的一次和三次导数:

$$\begin{aligned} & k_{j+\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{j+\frac{1}{2}} \\ &= \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_j \pm \frac{1}{2} \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_j + \frac{1}{8} \Delta y_{j+\frac{1}{2}}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_j + \text{H.O.T.} \end{aligned} \quad (4)$$

$$k_{j+\frac{1}{2}} \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \Big|_{j+\frac{1}{2}} = \left(k \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \right) \Big|_j + \text{H.O.T.} \quad (5)$$

将 (2)、(3)、(4) 和 (5) 式代入 (1) 式，对各阶项给出下列结果:

$$\text{-1 阶项} = \frac{2(a-b)}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_j$$

$$\begin{aligned}
0 \text{ 阶项} &= \frac{a\Delta y_{j+\frac{1}{2}} + b\Delta y_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_j \\
1 \text{ 阶项} &= \frac{a\Delta y_{j+\frac{1}{2}}^2 + b\Delta y_{j-\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_j + \frac{1}{12} \left(k \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \right) \Big|_j \right]
\end{aligned}$$

-1 项须消掉，故应有 $a = b$ 。而既然 0 阶项必然是 $\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$ ，显然 $a = b = 1$ 。

于是，由 a 和 b 的值，推出一阶项为：

$$1 \text{ 阶项} = \left(\Delta y_{j+\frac{1}{2}} - \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \right) \left[\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_j + \frac{1}{12} \left(k \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \right) \Big|_j \right].$$

因此，近似一般只有一阶精度。但是，如果格点距离的变化是二阶的，即

$\Delta y_{j+\frac{1}{2}} - \Delta y_{j-\frac{1}{2}} = O(\Delta y_{j\pm\frac{1}{2}}^2)$ ，则近似可达二阶。这提出了一个拉伸量的需求，

拉伸可以调节格点大小使保持二阶精度。

2.2 格点生成

在 x 轴方向，保持常数间隔，在 y 轴方向，本问题的格点产生算法如下：

- 为简单起见，要求衬垫壁表面 $y = -t_w$ 和 $y = 0$ 处均为网格线。
- 在衬垫内， y 用常数间隔 Δy_w 划分。另外，从 $M_{\text{lower}} t_w \leq y \leq M_{\text{upper}} t_w$ 一直保持常数分格，其中 M_{lower} 和 M_{upper} 是用户输入值。在本问题中，固定取值为 $M_{\text{lower}} = 3$ 和 $M_{\text{upper}} = 5$ 。
- 在精细区域外，网格按几何比例拉伸， $\Delta y_{j+\frac{1}{2}} = s \cdot \Delta y_{j-\frac{1}{2}}$ 其中 s 为用户定义的输入参量。关于拉伸效果的研究在本报告后面给出。
- 远处边界距离设为 H_{upper} 和 H_{lower} 。实际上，格点的外边界至少需要达到这个距离，但往往还要在大些，因为几何的格点距离增长无法给出一个确切地说明。

2.3 衬垫分析有限差分法的实现

$\frac{\partial T}{\partial x}$ 的逆风二阶近似为:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\frac{3}{2}T_{j,k} - 2T_{j-1,k} + \frac{1}{2}T_{j-2,k}}{\Delta x}$$

这个近似值对除 $j = 1$ 和 $j = 2$ 以外的整个区域适用。既然在 $j = 1$ 用了 Dirichlet 条件, 只剩下 $j = 2$ 。在这个位置, 用中心差分近似。关于 y 的差分在 2.1 节作了说明, 最终的程序见课程网页。

2.4 温度预报的精度研究

2.4.1 基本分辨率的研究

这些模拟的上、下限分别取在壁表面上方的约 $20h$ 和壁表面下方的 $10h$ 处。网格在表里特别给定的间隔的壁的下方取 $3t_w$ 的常数间隔, 在壁的上方取 $5t_w$ 的常数间隔。网格在这些常数间隔的区域之外拉伸了 $s = 1.5$ 倍。最大壁温度 (以 K 为单位) 关于 Δx 和 Δy 的变化在表 2 种给出。

结果显示在最粗的假设下 (即 $\Delta x/L=5$ 和/或 $\Delta y_w/t_w=2$) 结果与精细的网格有显著的不同。所以这些分辨率是不合适的 (尽管在某些情形 T_{\max} 与最精细的网格试验结果几乎一样)。另外显然有: 当 $\Delta x/L=10, 20$ 和 30 时, x 的间隔对于 T_{\max} 的精度控制上基本不起作用, 因为 T_{\max} 的变化仅有 $1K$ 。而且, $\Delta y_w/t_w=4$ 显而易见的太粗了, 因此使得最大化有效且精度合理的最佳网格似乎应为 $\Delta x/L=10$ 和 $\Delta y_w/t_w=8$ 。图 2 画出了三个精细网格情形的上表面壁温度的曲线。

2.4.2 远区域边界设置的影响

接下来研究远区域边界设置的影响。对于上边界, 出口温度和上表面温度关于上边界位置的分布在图 3 中给出。结果表明, 当 $H_{\text{upper}} > 20h$ 时, 几乎不存在对温度的依赖关系, 类似的结果对于截断 $H_{\text{lower}} > 15h$ 的下边界也存在。

2.4.3 拉伸的影响

对 $H_{upper}>20h$ 和 $H_{lower}>15h$ 的情形研究了拉伸的影响。结果显示 T_{max} 对拉伸因子的依赖相对比较小，在 1-2K 的量级上（图 4）。于是对基线取一个中间值 $s = 1.5$ 。

$\Delta x/L$	$\Delta y_w/t_w$			
	2	4	8	12
5	1280.9	1287.9	1292.8	1294.3
10	1276.2	1282.2	1286.4	1287.8
20	1277.0	1282.5	1286.3	1287.5
30	1277.9	1283.3	1287.1	1288.3

表 2: 最大壁温度 (K) 关于壁附近 y 间隔和 x 间隔的变化。

在这些模拟中，上、下限分别取在壁表面上方的约 $20h$ 和壁表面下方的 $10h$ 处。网格在表里特别给定的间隔的壁的下方取 $3t_w$ 的常数间隔，在壁的上方取 $5t_w$ 的常数间隔。网格在这些常数间隔的区域之外拉伸了 $s = 1.5$ 倍。

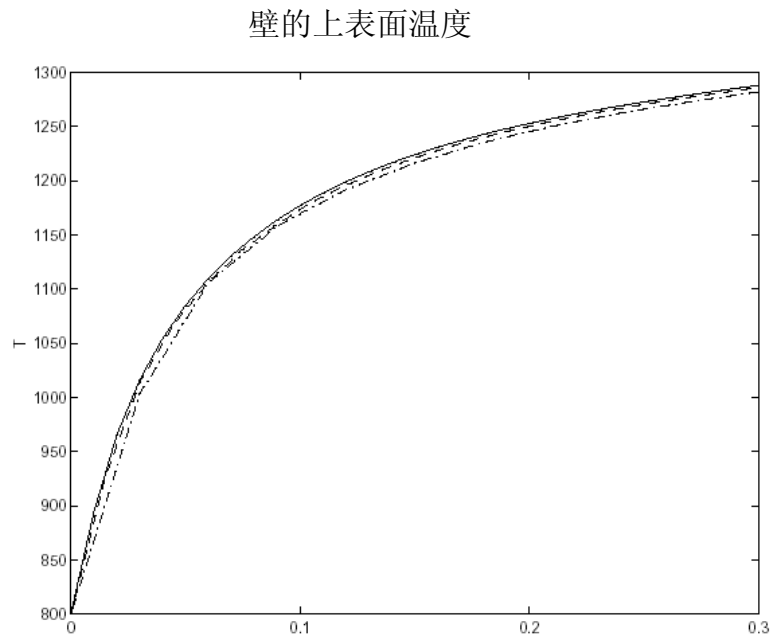


图 2: 格点分辨率对壁的上表面温度 (K) 的影响。 $(\Delta x/L, \Delta y_w/t_w) = (10, 4), (20, 8)$ 和 $(30, 12)$ 分别对应点虚线，虚线和实线。

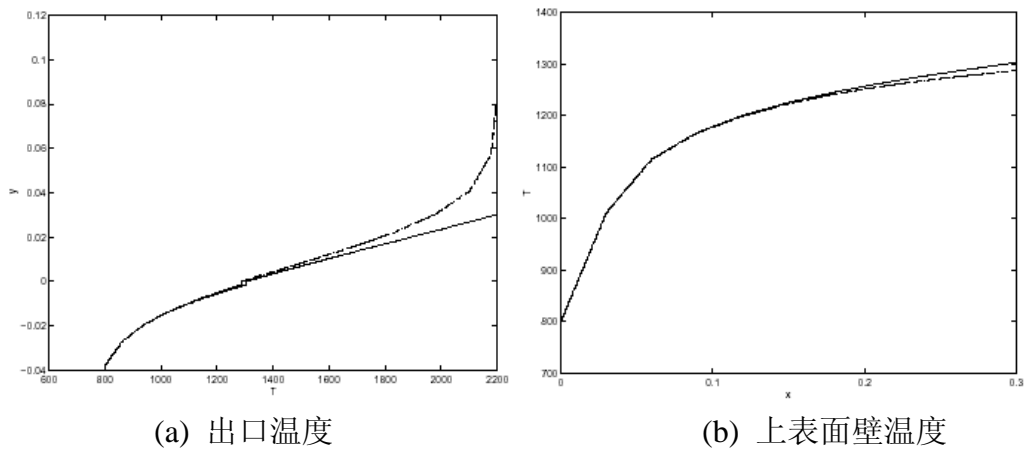


图 3: 出口温度和上表面壁温度关于远处边界位置的变化。 $H_{upper}=10h$ (实线), $20h$ (虚线) 和 $30h$ (点虚线)。

2.4.4 基线网格特征和解的图

从上述精度研究可给出了基线网格参数, 见表 3。该区域中的温度等高图由图 5 给出。正如图中预期的, 最大壁温度大约为 $1286.6K$, 估计误差约 $\pm 5K$ 。

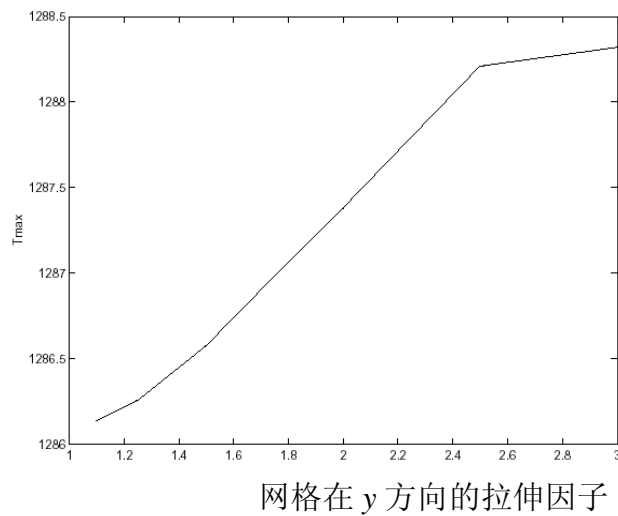


图 4: 最大壁温度随网格在 y 方向的拉伸因子的变化。

参数	定义	取值
H_{upper}	上边界位置	$20h$
H_{lower}	下边界位置	$15h$
Δx	x -间隔	$L/10$
Δy_w	(壁附近)精细网格 y -间隔	$T_w/8$
y_{upper}^{fine}	壁上方精细网格区域	$5h$
y_{lower}^{fine}	壁下方精细网格区域	$3h$

s	Y -拉伸因子	1.5
-----	-----------	-----

表 3: 基线网格的参数。注意: 对这样的设置, 网格大小为 11×103 .

温度等高图

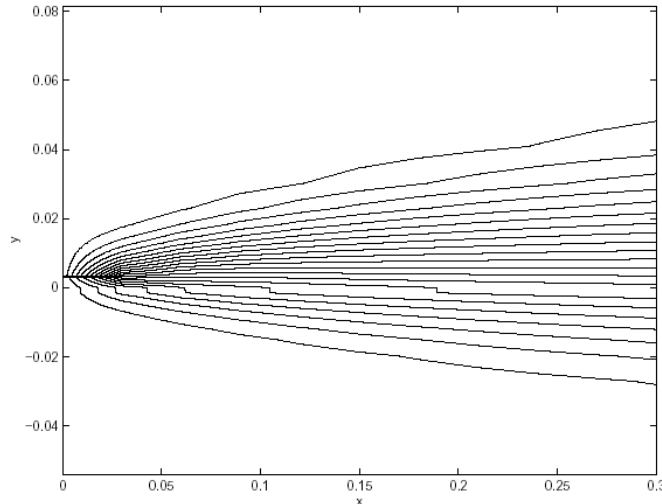


图 5: 基线模拟的温度等高图分布。最大的壁温度为 1286.58 度 K

2.5 冯·纽曼分析

假设对一个不稳定的问题使用这个模型, 则基本控制方程变为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

我们将用向前欧拉积分把这个方程空间离散化, 对其线性部分进行冯·纽曼分析。为此, 我们仍需假设 y 是等间隔的。特别对于这个问题, 方程模型的半离散形式为,

$$\frac{\partial T_{j,k}}{\partial t} + U \frac{\frac{3}{2}T_{j,k} - 2T_{j-1,k} + \frac{1}{2}T_{j-2,k}}{\Delta x} = k \frac{T_{j+1,k} - 2T_{j,k} + T_{j-1,k}}{\Delta x^2} + k \frac{T_{j,k+1} - 2T_{j,k} + T_{j,k-1}}{\Delta y^2}$$

按照通常的冯·纽曼分析, 用下式替代 $T_{j,k}$,

$$T_{j,k} = \hat{g}(t, \beta_x, \beta_y) e^{i(j\beta_x + k\beta_y)}, \quad (\text{根据下文, } g \text{ 函数中应有 } t, \text{ 译者注})$$

其中 β_x 和 β_y 是离散无量纲波数。 $\hat{g}(t, \beta_x, \beta_y)$ 是波的放大因子。这导致 \hat{g} 的如下基本控制方程:

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial t} = \lambda(\beta_x, \beta_y) \hat{g},$$

其中

$$\lambda \Delta t = -\frac{U \Delta t}{\Delta x} \left(\frac{3}{2} - 2e^{-i\beta_x} + \frac{1}{2}e^{-2i\beta_x} \right) + 2\frac{k \Delta t}{\Delta x^2} (\cos \beta_x - 1) + 2\frac{k \Delta t}{\Delta y^2} (\cos \beta_y - 1)$$

2.5.1 衬垫壁的稳定性的约束

在衬垫壁内部，用基线网格可得到 λ 中参数的下列值，

$$\frac{U}{\Delta x} = 0, \quad \frac{k}{\Delta x^2} = 2.9 \times 10^4 / \text{sec}, \quad \frac{k}{\Delta y^2} = 7.4 \times 10^8 / \text{sec},$$

注意到在衬垫壁内的大的比例值 $\Delta x / \Delta y = 160$ 导致 $k / \Delta y^2$ 的值比 $k / \Delta x^2$ 的值高 4 个量级。因 $U=0$ 在壁内，所以特征值是（非正）实数。为保持在向前欧拉方法的稳定区域内，特征值向负方向的延伸大小不能超过 2。这要求 $\Delta t = 6.7 \times 10^{-10}$ 秒，相对于热气体对流经过衬垫的时间，即 $L / U_{\text{hot}} = 2 \times 10^{-3}$ 秒而言，这是个很苛刻的时间步长限制。特征值在图 6 画出。

2.5.2 壁附近的稳定性约束

在衬垫壁附近，尽管还是在气体里，可得到 λ 中参数的下列值

$$\frac{U}{\Delta x} = 5.0 \times 10^3 / \text{sec}, \quad \frac{k}{\Delta x^2} = 1.1 \times 10^2 / \text{sec}, \quad \frac{k}{\Delta y^2} = 2.8 \times 10^6 / \text{sec},$$

和以前一样，壁附近的大的比值导致一个严格的时间步长限制。然而，由于气体传导比壁的传导小两个量级，时间步长的限制不像衬垫壁的情形那么严格。在此情形，我们有一个导致 λ 产生虚部的对流速度。不过，因为 $U / \Delta x$ 比 $k / \Delta y^2$ 小得多，特征根的结果紧靠实轴。本问题中，时间步长的限制大约为 $\Delta t = 1.77 \times 10^{-7}$ 秒或者 $\Delta t L / U_{\text{hot}} = 8.85 \times 10^{-5}$ 。特征根由图 7 画出。

2.5.3 远区域稳定性约束

在远区域边界附近，可得到 λ 中参数的下列值，

$$\frac{U}{\Delta x} = 3.3 \times 10^3 / \text{sec}, \quad \frac{k}{\Delta x^2} = 1.1 \times 10^2 / \text{sec}, \quad \frac{k}{\Delta y^2} = 2.5 \times 10^2 / \text{sec},$$

在远区域, y -间隔大得多, 因此 $k/\Delta y^2$ 不再是稳定性中的严格的限制因子。事实上, 对流的尺度大约是一个量级的大小。但在本问题中, 稳定性约束有点脆弱。特别来看图 8, 它给出了 $\Delta t = 1.1 \times 10^{-4}$ 秒的特征根。

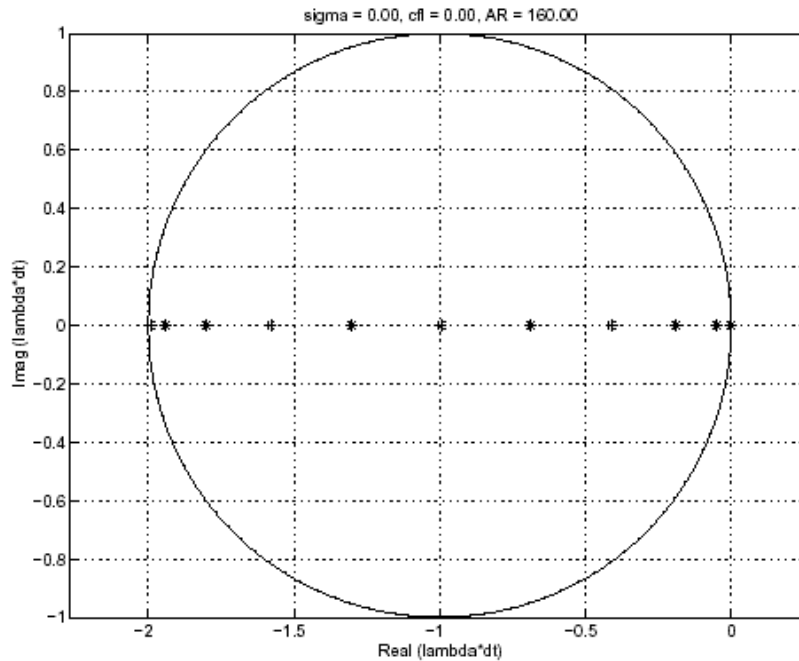


图 6: 衬垫壁在 $\Delta t = 6.7 \times 10^{-10}$ 秒条件下的特征根图。向前欧拉法的稳定性边界叠画在图中。

如图中加重的部分所示, 有几个特征根是在向前欧拉法的稳定边界之外的。为把它们放到稳定区域内, 需要比从 CFL 约束中估计的值小得多的 Δt 。特别通过误差判别的试验, 发现最大值为 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-5}$ 秒或者 $\Delta t L / U_{\text{hot}} = 1 \times 10^{-2}$ 。特征根的图示于图 9。这转化为 CFL 数就是 $U_{\text{hot}} \Delta t / \Delta x = 0.0667$, 这比起 CLF 条件要求的两个值小 30 倍。

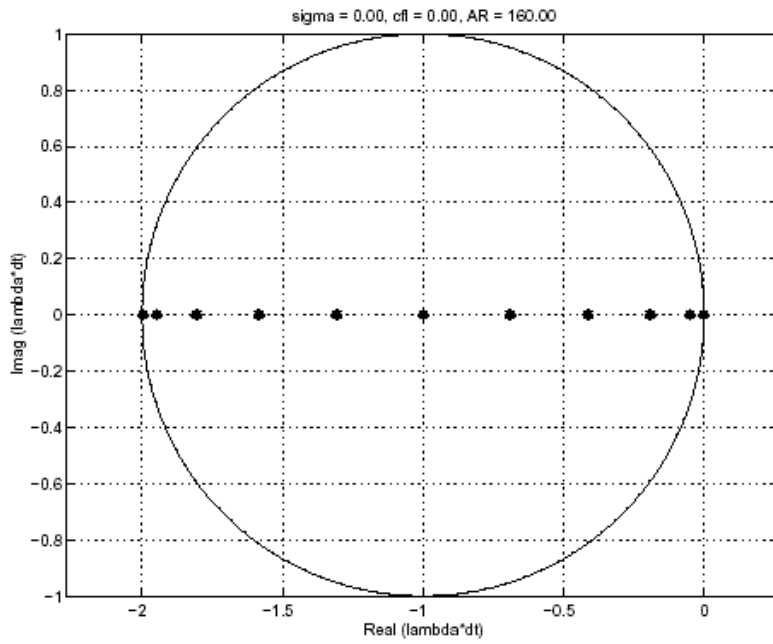


图 7: 衬垫壁附件在 $\Delta t = 1.77 \times 10^{-7}$ 秒条件下的特征根图。向前欧拉法的稳定性边界叠画在图中。

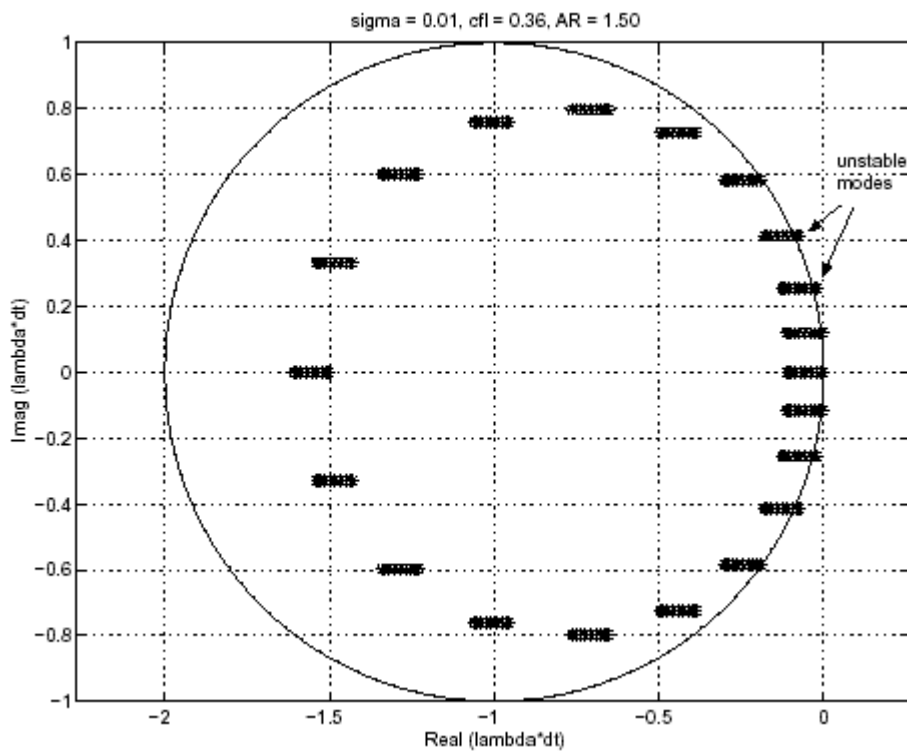


图 8: 远区域在 $\Delta t = 1.1 \times 10^{-4}$ 秒条件下的特征根图。向前欧拉法的稳定性边界叠画在图中。

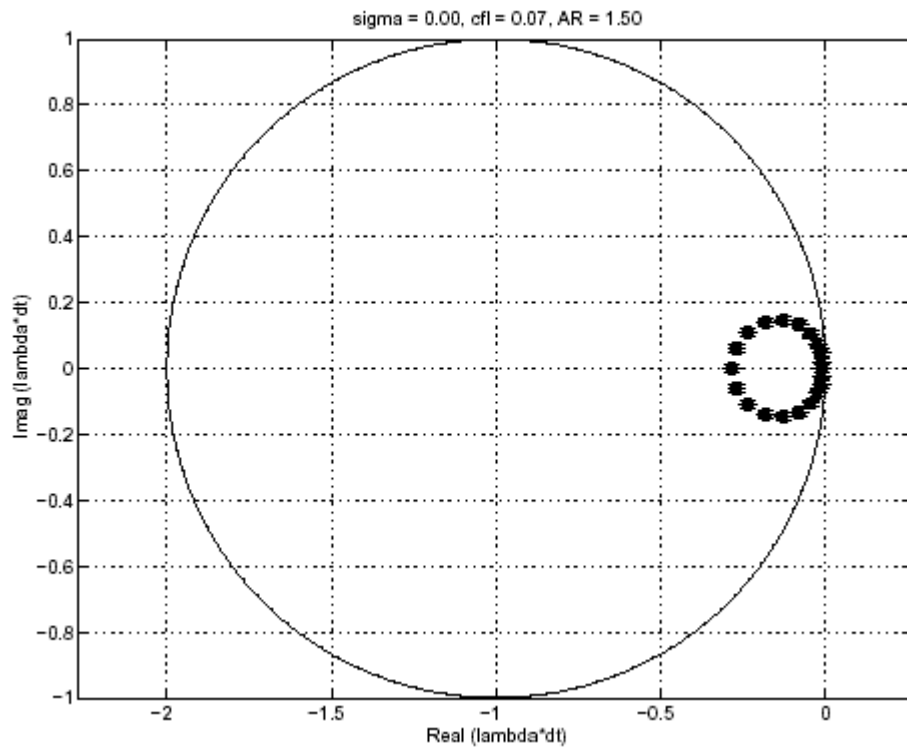


图 9: 远区域在 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-5}$ 秒条件下的特征根图。向前欧拉法的稳定性边界叠画在图中。