

# 16.901 有限差分法方案

## 风洞内机翼上方气流的模拟

期限：4月22日，下午2点

### 1 背景知识

机翼上的气流，特别是受力，常常是通过风洞试验来估计的。遗憾的是风洞壁对于空气动力学是有影响的，会导致机翼上产生不同的气流。其中某些影响可以通过无粘性势流的计算估计出来。本方案将推出风洞试验截面内刻画机翼上方的无粘性，不可压缩流的有限元方法。

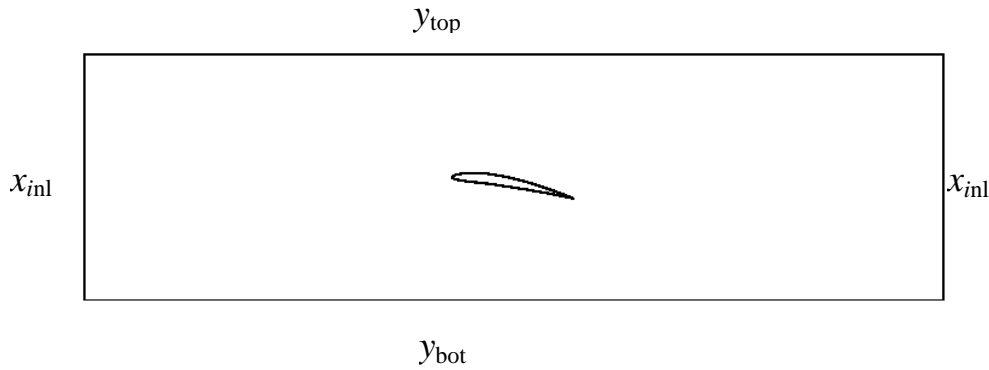


图 1：风洞/机翼计算区域

| 参数          | 定义    | 值    |
|-------------|-------|------|
| $x_{inl}/c$ | 入口位置  | -3.0 |
| $x_{out}/c$ | 出口位置  | 4.0  |
| $y_{bot}/c$ | 底部壁位置 | -1.0 |
| $y_{top}/c$ | 顶部壁位置 | 1.0  |

表 1：风洞计算区域的边界位置（注意：是机翼的翼弦）。

图 1 显示了风洞的计算区域。指定的几何参数值由表 1 给出。 $x$  和  $y$  的速度分量  $u$  和  $v$  可以通过二维流的流函数  $\Psi$  求出，

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

在无旋流（即散度为零的流体）中，流函数  $\Psi$  的基本控制方程是：

$$\nabla^2 \Psi = 0,$$

在计算区域的出入口，我们假设气流只有  $x$  方向的分量（即  $v=0$ ），于是，边界条件为，

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad \text{当 } x = x_{\text{inl}} \text{ 和 } x = x_{\text{out}} \text{ 时。}$$

计算区域的顶部和底部都是壁，因而就是气流的流线。所以，壁上的边界条件将是 Dirichlet 条件，

$$\Psi(x, y_{\text{top}}) = \Psi_{\text{top}}, \quad \Psi(x, y_{\text{bot}}) = \Psi_{\text{bot}}.$$

$\Psi_{\text{top}}$  和  $\Psi_{\text{bot}}$  可以通过固定风洞的质流率来设置。首先，我们注意到经过风洞的质量流为，

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{tunnel}} &= \rho \int_{y_{\text{bot}}}^{y_{\text{top}}} u dy, \\ &= \rho \int_{y_{\text{bot}}}^{y_{\text{top}}} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy, \\ &= \rho(\Psi_{\text{top}} - \Psi_{\text{bot}}). \end{aligned} \tag{1}$$

为设置质量流的实际值，我们假设平均的迎风速度是  $U_{\infty}$ 。在此假设下，风洞内的质量流也可写作，

$$\dot{m}_{\text{tunnel}} = \rho U_{\infty} (y_{\text{top}} - y_{\text{bot}}). \tag{2}$$

因此，由 (1) 和 (2) 式中质量流的等量代换给出，

$$\Psi_{top} - \Psi_{bot} = U_{\infty}(y_{top} - y_{bot}).$$

因为可以在  $\Psi$  上任意增加一个常数（因为  $\Psi$  的导数值才决定流速），我们可以选取  $\Psi_{bot} = U_{\infty}y_{bot}$ ，这给出壁边界条件的最后形式

$$\Psi_{bot} = U_{\infty}y_{bot}, \quad \Psi_{top} = U_{\infty}y_{top}.$$

机翼表面将是一条流线（即  $\Psi$  取常数），因此机翼上的边界条件将为 Dirichlet 条件，

$$\Psi_{\text{机翼}} = \Psi_a,$$

其中  $\Psi_a$  为某常数。 $\Psi_a$  的取值将在任务的说明中进行讨论。

## 2 任务

### 2.1 称流的有限元方法（50%）

第一个任务是导出求解对称机翼周围的气流在零迎角的有限差分方法。在此情况下，气流是对称的（因为机翼也处于风洞中心），于是，机翼上的流函数值为保证对称性必为零。故  $\Psi_a = 0$ 。

机翼的三角形元的网格已经生成，数据存储在 MATLAB 的数据文件 `g0012.mat` 中（注意：由于数据是以二进制形式储存的，你不能对它进行编辑）。图 2 画出了该网格的图。求解的 MATLAB 源程序梗概见 `tunflow.m`。请阅读程序的注释，从而了解网格数据是如何存储的以及如何编写程序的其余部分。

本任务涉及的文件如下：

- 具有完整注释的 MATLAB 源程序（或者，如果你把求解过程

分成若干模块的程序)。我们将根据你对要做工作所作注释的清晰程度来打分。你应当有足够的注释,使得那些对空气动力学和有限元方法有些了解的人清楚地理解你在程序中要做的事。

- 对本方案的所有模拟情形画出流函数的等高图。
- 注意:因为算法是拉普拉斯方程的标准有限元离散化方法,除了源程序中已经有的算法描述外无需其它描述。

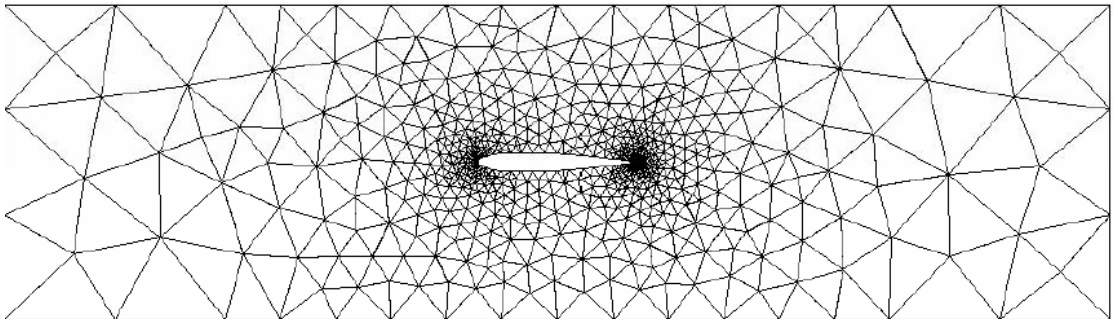


图 2: NACA (National Advisory Committee for Aeronautics 国家航空咨询委员会) 0012 问题的网格。

## 2.2 压力系数的计算 (10%)

无粘性,无旋流的压力系数可由伯努利方程求解,

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{q}{U_\infty}\right)^2,$$

其中  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$  是局部流速。各元素的速度分量可根据流函数的梯度计算得出而且可以用来求各元素中的。把你算出的  $C_p$  存到程序

`tunflow.m` 的数组  $C_p$  中，它在运行 `tunflow.m` 的最后调用子程序 `tunplotflow.m` 时会被画出。

- 包括一个简要（但完整）的描述说明你是如何从  $\Psi$  的有限元解中计算  $C_p$  的。
- 包括你在本方案中对所有结果得到的  $C_p$  分布图。

### 2.3 对非对称流的修正（20%）

对非对称流，机翼表面的流函数在模拟前是不知道的。因此须由某些其它的约束来求得。为此，我们将用 Kutta 条件。Kutta 条件要求流体平滑地离开前缘。为保证这个条件，要求流体在后缘时沿着后缘角平分线的方向。后缘的几何在图 3 中画出。由于流体是沿着  $\vec{n}_{te}$  方向的，所以  $\Psi$  在这个方向必为常数。

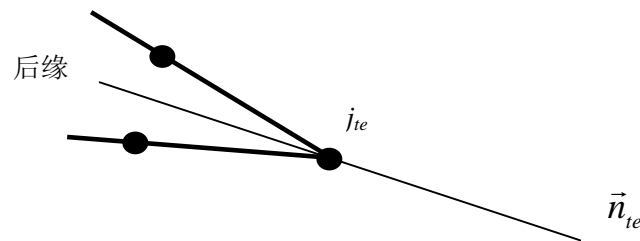


图 3： 后缘几何。  $\vec{n}_{te}$  = 后缘角平分线方向矢。  $j_{te}$  = 后缘节点的指标。

（由于  $\Psi$  的常数线是流体的流线），Kutta 条件变为：在后缘，

$\nabla\Psi \cdot \vec{n}_{te} = 0$ . 在有限差分方法中, 我们将用加权的剩余形式实现这个条件, 明确地来说就是

$$R_{te} \equiv \iint_{\Omega} w_{te} \nabla\Psi \cdot \vec{n}_{te} dA = 0,$$

其中 $\Omega$ 是总的计算区域,  $w_{te}$ 是在后缘节点 $j_{te}$ 处的权函数。如果 $N_v$ 是顶点的总数, 我们从加权的剩余形式和Dirichlet边界条件中可以导出 $N_v$ 个方程, 还可以从Kutta条件中导出一个方程。未知量是 $\Psi$ 在节点的 $N_v$ 个值和流线在机翼上的值 $\Psi_a$ 。因此我们有 $N_v+1$ 个方程和未知数。

为应用Kutta条件, 建议按下面的步骤来做:

1. 把 $\Psi_a$ 加在未知量向量的末端, 即在程序 **tunflow.m** 中, 令  $psi(N_v+1) = \Psi_a$ .

为此, 我们需要修正机翼上的 Dirichlet 边界条件. 对于对称流体在节点处的剩余方程是,

$$R(j) \equiv psi(N_v+1) = 0,$$

但现在变为,

$$R(j) \equiv psi(j) - psi(N_v+1) = 0.$$

因此, 劲度矩阵相应于对 $psi(N_v+1)$ 的依赖, 在第 $N_v$ 列有了一个非零值。然后, 在对Kutta条件做修正时, 第一步要加上以下方程,

$$R(N_v+1) \equiv psi() = 0.$$

于是, 如果你这一步做对了, 解将等同于 2.1 节中运行 NACA0012 网格时得到的解。

2. 接着, 我们把上述给定的 $R_{te}$ 方程离散化。注意, 这需要编点程

序来求后缘的节点和后缘角平分线的方向。然后，你要计算加权剩余方程（和相应的矩阵值），它们包括后缘节点附带的任意三角元的贡献。对这个加权剩余方程，你或许想用高斯积分来估计各后缘三角形的积分（所需公式见 2.5 节）。做完这一步后，在 NACA0012 的情形下检验之。既然流体是对称的，这个条件应产生一个类似于前节的解，在那里， $\Psi_a$  被硬性地规定为 0。

3. 最后，在 `g4408.mat` 和 `g4408aoa10.mat` 网络上运行改进后的求解程序。这些网格都是为 NASA 4408 机翼设计的。`g4408.mat` 的迎角设为 0，`g4408aoa10.mat` 的迎角设为 10 度。如果求解顺利，放大到后缘的区域，你应当能看到流线的等高图是沿着后缘角平分线方向的。
4. 给出流线的图以说明实施 Kutta 条件的合理性。要包括  $C_p$  的分布图。
5. 如在 2.1 节描述的那样，确保在你的程序中对实施 Kutta 条件进行了完整的注释。

## 2.4 $\vec{x}$ 关于 $\vec{\xi}$ 的面积元素关系式的推导

证明，

$$dA = |J| d\xi_1 d\xi_2 \quad \text{其中 } J = \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_1}.$$

提示：计算顶点在

$\bar{x}(\xi_1, \xi_2), \bar{x}(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2), \bar{x}(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2)$ 和 $\bar{x}(\xi_1, \xi_2 + d\xi_2)$

的梯形面积。

## 2.5 高斯积分单点的导出 (10%)

对于 $\xi$ -平面内顶点在(0,0),(1,0)和(0,1) 的参考元素, 考虑下面的单点高斯积分法,

$$\iint_{T_{ref}} g(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx \frac{1}{2} g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

证明这个积分对于任何 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 的线性函数

$$g(\xi_1, \xi_2) = c_0 + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2,$$

精确成立。但对一般的双线性函数

$$g(\xi_1, \xi_2) = c_0 + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_{12} \xi_1 \xi_2,$$

不成立。其中 $c_0, c_1$ 和 $c_{12}$ 是常数。