16.901：最优化项目

燃烧室衬垫的气膜冷却设计

示范解答

期限：5 月 10 日下午 2 点

1 背景知识

在燃烧室初始段内的温度是显著地高于大部分未经特殊耐热处理的材料可承受的温度的。于是，燃烧室设计的一个关键点就是找出一种冷却燃烧室衬垫壁的方法，使衬垫温度充分低于其材料的耐受极限。一种典型的使燃烧室衬垫冷却的方法是借助气膜冷却。气膜冷却是将气体事先从主流通道导入燃烧室，然后沿着衬垫表面重新放出，形成一层较冷的气体膜来保护衬垫。

在这个项目里，你要考虑衬垫气膜冷却的优化设计问题。衬垫冷却的数值模拟是基于用在 16.901 的项目二中开发的有限差分法。与此相关的模型见图 1。在本项目中，冷却气体速度U_{cool} 和冷却膜的厚度 h 是两个设计变量，为保证设计的真实性，我们要求设计变量是有界的：

$$50m/s \le U_{cool} \le 250m/s$$
$$0.001\,m \le h \le 0.005\,m$$

所有参数值（或取值范围）在表 1 中给出：

参 数	定 义	值
k_g	气体传导率	0.1W/(m K)
k_w	壁传导率	26.0W/(m K)
h	冷却通道高度	0.001-0.005 m
L	冷却通道之间的轴向长度	0.3 m
U_{hot}	热流速度	100 m/sec
U_{cool}	冷流速度	50-250 m/sec
T_{hot}	热流温度	2200 K
T_{cool}	冷流温度	800 K
t_w	衬垫壁厚度	0.0015 m

表 1:　参数定义和取值

2． 任务

2．1 衬垫温度的最小化（20%）

在第一个任务中，我们考虑衬垫最高温度$T_{\max}$ 得最小化。注意，假设$T_{\max}$在燃气室计算范围内出口的上表面出现，设计参数是无量纲的，且按如下方式映射到在−1 和+1 之间：

$$x_1 = -1 + 2\frac{U_{cool} - \min U_{cool}}{\max U_{cool} - \min U_{cool}} \qquad x_2 = -1 + 2\frac{h - \min h}{\max h - \min h}$$

其中 $\min U_{\text{cool}}$ 是设计参数U_{cool}的最小值，其它设计参数也一样。然后，用Matlab 的优化子程序**fmincon**在设计空间内最小化$T_{\max}$。**fmincon**通过有限差分法计算出所需的导数值。得出的$T_{\max}$的最小值为$T_{\max}$=1180.4K. 这个值出现在 U_{cool}=250 m/sec和h=0.005 m处。既然对于设计的最大的冷却气流和最大高度预期出现最小温度，这个设计点应是合乎逻辑的。显然U_{cool}和h的取值都在设计范围之内。

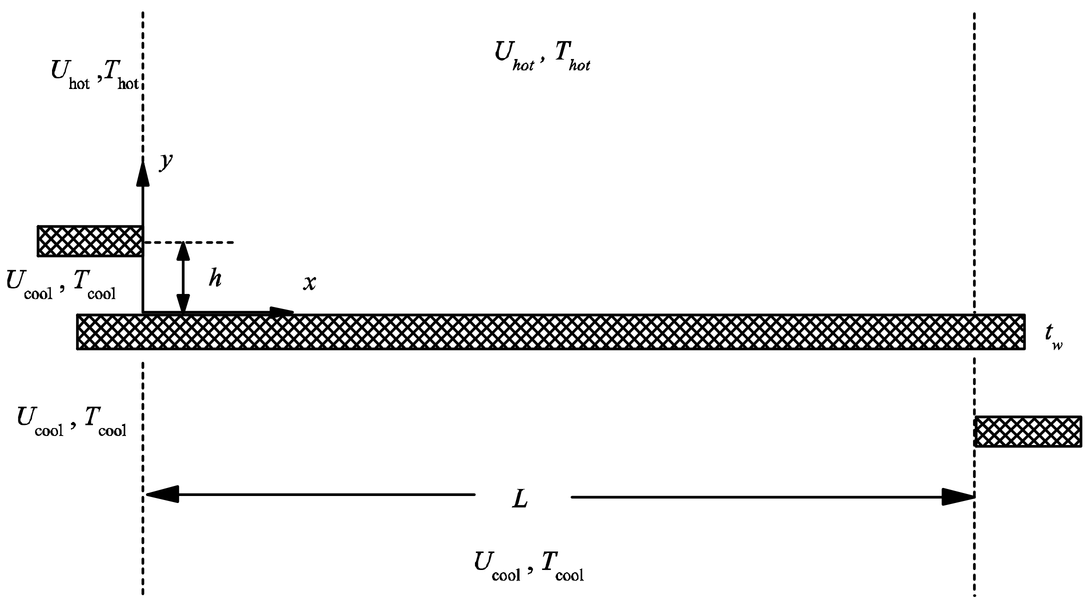


图 1: 带冷却膜的燃烧室衬垫

本问题的最优化过程是从设计空间的中心开始的（即：在U_{cool}=150 m/sec和

h=0.003 m处）。优化过程纪录为：

迭代	计算函数值数	函数值	约束	步长大小	导数	过程
UseIter	F-count	f(x)	constraint	Step-size	derivative	Procedure
1	3	-0.0099065	-1	1	-0.037	
2	7	-0.0235035	-0.8135	1	-1.66e+05	Hessian modified
3	11	-0.0920041	0	1	-1.8e-09	

```
Optimization terminated successfully:
Search direction less than 2*option.TolX and
maximum constraint violation is less than option.TolCon
Active Constraints:
  3
  4
```

用于温度最小化的 Matlab 的主要程序是 **minT.m** 。

2.2 冷却质量流的最小化（20%）

在这一部分，我们在某给定最高温度极限下将冷却膜内的质量流最小化。特别地，要求解下列问题：

$$\min \dot{m} = U_{cool} h \quad 使得 \quad T_{\max} = T_{\lim}$$

为此，设$T_{\lim}$=1300 K，用下面无量纲的形式来设置温度限制：

$$\frac{T_{\max}}{T_{\lim}} - 1 = 0$$

和前面的情形一样，用有限差分求导数。最优化的主程序是**optliner.m**从设计空间的中心开始运行程序。给定质量流$\dot{m}$ =0.192 m^2/sec后，最优设计出现在U_{cool}=189.7 m/sec和h=0.001 m处。本过程的迭代纪录为：

Iter	F-count	max Constraint		Step-size	Directional derivative	Procedure
1	3	0.45	0.009906	1	-0.0656	
2	7	0.384226	0.006096	1	0.097	Hessian modified
3	25	0.38422	0.006096	-6.1e-05	-0.0227	
4	29	0.360757	0.002662	1	0.00674	
5	33	0.367434	0.0001362	1	0.000366	Hessian modified
6	37	0.367799	7.998e-06	1	-0.000152	Hessian modified twice
7	41	0.367647	2.128e-06	1	-0.0102	Hessian modified twice
8	45	0.35741	7.668e-05	1	-0.0181	
9	49	0.338858	0.0003395	1	-0.17	Hessian modified twice
10	53	0.154972	0.02271	1	-0.0173	
11	57	0.172227	0.01157	1	0.00926	
12	61	0.181486	0.006055	1	0.00995	
13	65	0.191484	0.0006509	1	0.00118	
14	69	0.192632	8.006e-05	1	-0.000587	Hessian modified twice
15	73	0.191928	0.0001628	1	0.0003	Hessian modified
16	77	0.192227	1.209e-06	1	-1.23e-05	Hessian modified

Optimization terminated successfully:

2.3 用解析方法得出的导数使冷却物质流最小化（40%）

对于目标函数的导数（即 $\dot{m}$ ）和关于设计变量的限制方程的导数，我们将解析的敏感度导数补充到 Matlab 源程序中。$\dot{m}$ 的导数因为直接依赖于设计变量，因此很简单：

$$\frac{d\dot{m}}{dU_{cool}} = h,$$

$$\frac{d\dot{m}}{dh} = U_{cool}.$$

由于设计变量已经被无量纲化，所以关于有量纲的设计变量的敏感度导数应为：

$$\frac{d\dot{m}}{dx_1} = \frac{\max U_{cool} - \min U_{cool}}{2} \frac{d\dot{m}}{dU_{cool}},$$
$$\frac{d\dot{m}}{dx_2} = \frac{\max h - \min h}{2} \frac{d\dot{m}}{dh}.$$

限制方程依赖于有限差分气膜冷却模型的状态。特别地，$T_{\max}$指输出口上表面的温度，它是根据有限差分的方法得出的。例如，考虑到$T_{\max}$依赖于h，其导数应为：

$$\frac{dT_{\max}}{dh} = \frac{\partial T_{\max}}{\partial h} + \frac{\partial T_{\max}}{\partial \vec{T}} \frac{d\vec{T}}{dh}, \tag{1}$$

其中$\vec{T}$是从有限差分模型中解出的温度向量。既然$T_{\max}$不直接依赖于设计变量，所以 $\frac{\partial T_{\max}}{\partial h} = 0$ 进一步，$\frac{\partial T_{\max}}{\partial \vec{T}}$ 是零向量，只有输入信号对应于上表面时，出口位置的导数是 1。因而剩下的困难就是求 $\frac{d\vec{T}}{dh}$。将有限差分法的基本方程写为一组残差方程的形式，有：

$$\vec{R}(\vec{T}, h) = 0.$$

注意，我们没有详细地证明，除了其导数外，残差方程也是依赖于U_{cool}的。因此，若给h一个扰动，会产生$\vec{T}$的一个扰动。故有：

$$\vec{R}(\vec{T} + d\vec{T}, h + dh) = 0.$$

因此在小改变的限制下，可进行台劳展开，

$$\vec{R}(\vec{T} + d\vec{T}, h + dh) \approx \vec{R}(\vec{T}, h) + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{T}} d\vec{T} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial h} dh = 0$$

或者，重新排一下顺序，得到：

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{T}} \frac{d\vec{T}}{dh} = -\frac{\partial \vec{R}}{\partial h}$$

将此结果代入(1) 式，给出，

$$\frac{dT_{\max}}{dh} = -\psi^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial h},$$

其中，伴随因子 ψ 满足，

$$\frac{\partial \vec{R}^T}{\partial \vec{T}}\psi = -\frac{\partial T_{\max}{}^T}{\partial \vec{T}}.$$

U_{cool}也有类似的结果，

$$\frac{dT_{\max}}{dU_{cool}} = -\psi^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial U_{cool}}.$$

求解这个基于伴随因子的敏感度导数是由 Matlab 程序 **condif.m** 完成的。

代入解析导数对限制条件$T_{\max}$=1300K再次运行最优化程序，最优解出现在U_{cool}=190.5 m/sec和h=0.001 m处。给出的物质流速为 $\dot{m}$ =0.192 m^2/sec,显然与 2.2 节有限差分的最有解相符。这个解的迭代过程为：

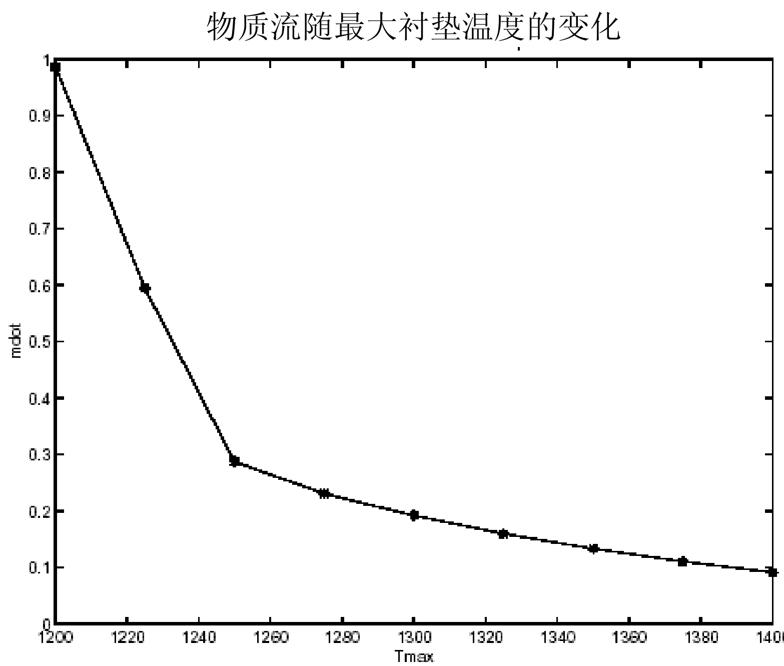
比较有限差分敏感性导数和基于伴随因子的解析导数这两种方法，显然地，有限差分需要计算 77 个点上的函数值，而解析方法只需计算 22 个点上的函数值。但是我们注意到解析方法需要计算转置，因此一个点的函数值和导数值约合两倍的有限差分法的计算量。

2.4 冷却物质流最小化的参数研究(20%)

用前节给出的解析导数所得的限制性最优化对T_{lim}施行一个从 1200K变至1400K的跟踪研究. 结果在图 1 中给出。

最小 $\dot{m}$ 关于T_{lim}的变化显示，随着T_{lim}的降低，$\dot{m}$ 增加。这个趋势是可以预期的。因为较低的温度需要通过较高的衬垫冷却实现，当然物质流速也更高。

在二维设计空间中的设计位置显示，在最苛刻的温度限制（即最低的T_{lim}）条件下，U_{cool}要用最大的物质流速，且h值也在其最大值附近。由于T_{lim}增加，h下降而U_{cool}保持在最大极限，最终，在$T_{\max}$=1275K，U_{cool}的值从其最大边界值下降。在这一点，进一步增加$T_{\max}$使U_{cool}进一步下降，而h固定在其最大值 0.001.



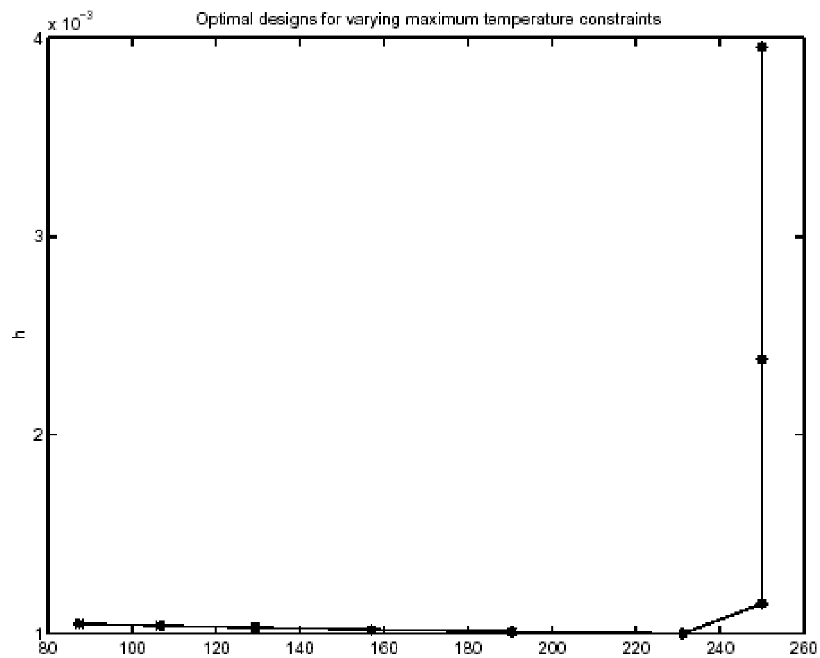


图 1：对变化的最大温度极限Tlim的跟踪研究。