

16.901 作业5

期限：4月14日 下午2点

在这个作业里，我们将考虑有源的1维传导方程

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = f(x)$$

与Galerkin方法、不连续Galerkin方法和逆风有限差分的离散化之间的关系。

我们做以下假设：

- 速度 u （关于 x ）是个常数并且大于零， $u > 0$
- 代表源的 $f(x)$ 是 x 的线性函数
- 网格间距 Δx 是个常量。所考虑区域内单元的个数为 N ，区域从 $x = 0$ 开始到 $x = L$ 结束。

与有限元的离散化相比较，我们可以回忆起下面三种有限差离散化。特别的，

$$\text{中心差分： } u \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} = f_i$$

$$\text{1次逆风差分： } u \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} = f_i$$

$$\text{2次逆风差分： } u \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta x} = f_i$$

问题1：利用线性单元的连续Galerkin方法

考虑一个标准的Galerkin有限元离散化。用部分积分法积分加权残差，对于一般的权重函数 $w(x)$ ，得到的方程结果是：

$$[wuT]_0^L - \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} u T dx = \int_0^L w f dx$$

接下来，考虑利用节点基的线性单元（即笔记里讲过的有限元离散化类型）这一特殊情况。证明一个非边界上的节点的权重函数的离散化结果为：

$$u(T_{i+1} - T_{i-1}) = \frac{1}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})] \Delta x,$$

其中 T_i 是 T 在节点 i 上的近似值, $f_i = f(x_i)$ 。

问题2: 利用常量单元的不连续Galerkin方法

现在, 我们考虑一种新的有限元方法, 不连续的Galerkin方法。在这种方法里, 解和权函数在单元间不需要连续。最简单的基函数在每一个单元里是常量。特别的, 假定解为以下形式:

$$T(x) = \sum_{i=1}^N T_i \phi_i(x)$$

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在这种情况下, T_i 代表了在单元 i 中的解。使用部分积分法, 证明与单元 i 的权函数相对应的权重残差是:

$$[uT]_{x_i}^{x_{i+1}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx$$

注意: 源的积分将在下一步被简化。

对于不连续Galerkin法, 通常的方法是使用一个逆风的流量来计算在单元末端的 uT 值 (即在 $x = x_i$ 和 x_{i+1})。例如, $uT(x_i)$ 可以用从单元 $i-1$ 开始的 $T(x)$ 来估算, 因为该单元是节点 i 的逆风。使用一个逆风的流量, 并简化源的条件 (因为它被假设为 x 的线性函数), 得出这个问题的离散化结果是:

$$uT_i - uT_{i-1} = \frac{1}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \Delta x。$$

问题3: 利用线性单元的不连续Galerkin方法

现考虑用线性单元的不连续Galerkin的近似, 即解在每一个单元内线性变化, 而不是使用节点基, 使用一种基使得未知量是每一个单元中点的 T 和它的微商 dT/dx 。

对这样的基，得到每一个元的加权残差方程（注意：每个单元有两个方程）。

问题4：与有限差分方法进行比较

与有限差分离散化相比，三种有限元离散化的效果如何？讨论不同离散化的相同点和不同点。