

# 16. 609 实例 #1 示范解

## 1. 背景知识

模拟飞机的动力学是非常复杂的。要描述它的运动需要 12 个状态变量：包括三个位置量，三个速度量，三个角方向量和三个角速度量。但是，如果我们做一些假设，并同时包含这 12 个相互耦合的参量的微分方程线性化，问题就可以大大简化。经过简化后我们将得到两个退耦的四状态系统，其中一个描述纵向运动，一个描述横向运动。

纵向模式甚至可以被进一步简化，在熟知的 **pheugoid** 模式和短周期模式下仍可得到相当精确的退耦模型。横向系统由于以下三种运动模式而很难简化：飘摆模式，螺旋模式和旋转模式。飘摆模式是偏航和旋转振动的结合。旋转模式中的旋转速度很快可以达到稳态。螺旋模式有可能有略微的稳定或者不稳定。不稳定的螺旋模式会导致飞机偏离其航线或者螺旋式俯冲。这三种水平模式将是第一个实例的内容，也是这节家庭作业的大部分问题的基础。

### 1.1 坐标系统及变量的定义

飞机的运动要通过某种相对静止的框架来测量，然而，我们通常只知道飞机相对于机身坐标系的性质。因此，我们需要确定的状态是机身的相对位置，运动旋转角度和角速度。图 1 画出了相对于机身坐标系  $(x_b, y_b, z_b)$  的力  $(X, Y, Z)$ ，力矩  $(L, M, N)$  和转动角速度  $(p, q, r)$ 。

表 1 给出了相关变量的定义。线性化的运动方程是关于稳定性导数以及力和力矩关于状态的一阶导数的方程。这些导数都用下标的形式表示。如， $Y_\beta \equiv \frac{\partial Y}{\partial \beta}$ 。通常，稳定性导数都给出的是无量纲形式，如  $C_{Y_\beta}$  为  $Y_\beta$  的无量纲形式。特别注意，表 2 中的定义都是很常用的，而且在作业和实例中也会用到。表 3 给出了作业和实例中我们要研究的飞机的稳定性导数的值和维数。

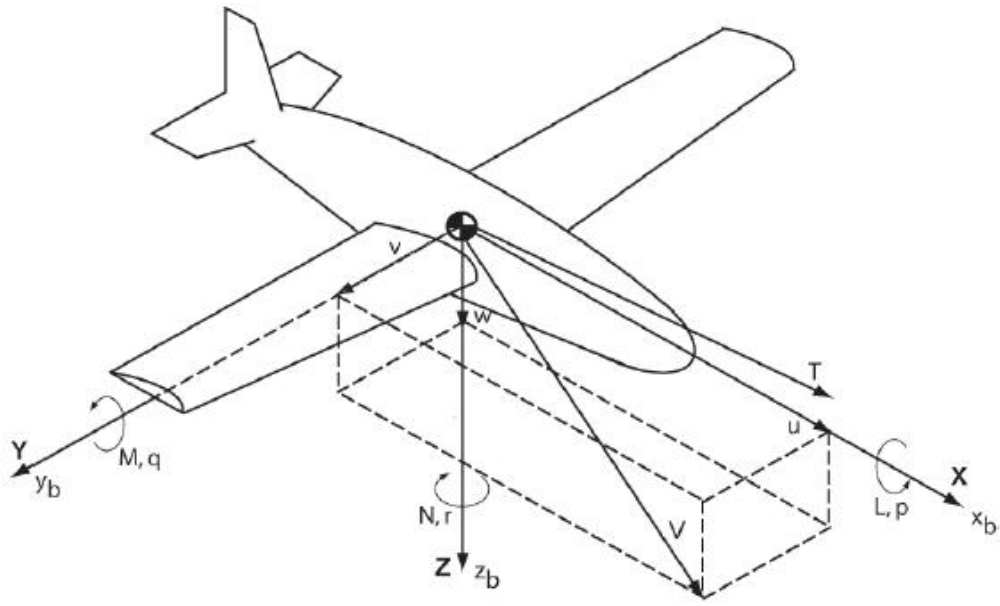


图 1: 固定在机身上的坐标系的定义

	符号	描述
状态	$\Delta\beta$	侧向滑动角扰动
	$\Delta p$	旋转速度扰动
	$\Delta r$	偏航速度扰动
	$\Delta\phi$	旋转角扰动
力和力矩	$Y$	侧向力(y 方向的力)
	$L$	旋转力矩(绕 x 轴的力矩)
	$N$	偏航力矩(绕 z 轴的力矩)
	$Q$	动压
其他量	$S$	(机翼)平面形状面积
	$b$	翼展
	$W$	飞机重量
	$m$	飞机质量
	$I_x, I_y, I_{xz}$	惯性力矩
	$g$	重力加速度
	$M_0$	马赫数
	$h_0$	高度
	$u_0$	x 方向初始速度

表 1: 变量注释

$Y_\beta = QSC_{y\beta}$	$L_\beta = Q Sb C_{l\beta}$	$N_\beta = Q Sb C_{n\beta}$
$Y_p = \frac{Q Sb}{2u_0} C_{yp}$	$L_p = \frac{Q Sb^2}{2u_0} C_{lp}$	$N_p = \frac{Q Sb^2}{2u_0} C_{np}$
$Y_r = \frac{Q Sb}{2u_0} C_{yr}$	$L_r = \frac{Q Sb^2}{2u_0} C_{lr}$	$N_r = \frac{Q Sb^2}{2u_0} C_{nr}$

表 2: 无量纲形式的稳定性导数定义

## 1.2 运动方程

方程(1)-(4)给出了水平运动的线性化方程。方程(1)为  $y$  方向动量守恒方程。方程(2)为  $x$  方向角动量守恒方程。方程(3)为  $z$  方向角动量守恒方程。最后，方程(4)为旋转角与旋转速率的关系。特殊情形下，取控制方程形式如下：

$$(mu_0 \frac{d}{dt} - Y_\beta) \Delta\beta - Y_p \Delta p + (mu_0 - Y_r) \Delta r - mg \Delta\phi = 0 \quad (1)$$

$$-L_\beta \Delta\beta + (I_x \frac{d}{dt} - L_p) \Delta p - (I_{xz} \frac{d}{dt} + L_r) \Delta r = 0 \quad (2)$$

$$-N_\beta \Delta\beta - (I_{xz} \frac{d}{dt} + N_p) \Delta p - (I_x \frac{d}{dt} - N_r) \Delta r = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta\phi = \Delta p \quad (4)$$

量	747 的值	F-104 的值
$C_{y\beta}$	-0.96	-1.17
$C_{yp}$	0	0
$C_{yr}$	0	0
$C_{l\beta}$	-0.221	-0.175
$C_{lp}$	-0.45	-0.285
$C_{lr}$	0.101	0.265
$C_{n\beta}$	0.150	0.50
$C_{np}$	-0.121	-0.14
$C_{nr}$	-0.30	-0.75
$S$	$5500 \text{ ft}^2$	$191 \text{ ft}^2$
$b$	$195.68 \text{ ft}^2$	$21.94 \text{ ft}^2$
$h$	海平面	海平面
$M_0$	0.25	0.257
$W$	$636600 \text{ lbs}$	$16300 \text{ lbs}$
$I_x$	$18.2 \times 10^6 \text{ slug ft}^2$	$3549 \text{ slug ft}^2$

$I_z$	$49.7 \times 10^6 \text{ slug ft}^2$	$59669 \text{ slug ft}^2$
$I_{xz}$	$0.97 \times 10^6 \text{ slug ft}^2$	0

表 3: 波音 747 客机和 F-104 战斗机在海平面上各个量的值

## 2. 作业安排

• 用以下 6 种积分方法:

- 一阶 Adams-Bashforth(AB1)方法。通常也叫向前欧拉方法。
- 二阶 Adams-Bashforth(AB2)方法。
- 一阶 Adams-Moulton(AM1)方法。通常也叫向后欧拉方法。
- 二阶 Adams-Moulton(AM2)方法。
- 2 阶龙格-库塔(RK2)法
- 4 阶龙格-库塔(RK4)法

交上实例文档及其算法的硬拷贝。

**解答:** 察看本课程网页上关于不同方法的 matlab 脚本。

研究应用以上六种方法的精度和效率: 找出在以下初始条件下从  $t=0\text{s}$  到  $t=30\text{s}$  的  $u(t)$ :

$$\Delta\beta(0) = 0.1\text{rad}, \Delta p(0) = 0, \Delta r(0) = 0, \Delta\phi(0) = 0$$

注意: 与第二个家庭作业相比, 这里的完成时间已经缩短了。

• 在这个作业中, 测量的精度就是 (任意迭代过程中) 侧向滑动角扰动的最大误差, 即:

$$E \equiv \max_n |\Delta\hat{\beta}^n - \Delta\beta(n\Delta t)|$$

其中  $\Delta\hat{\beta}^n$  为积分运算第  $n$  次迭代得到的侧向滑动角的扰动值。对两种飞机和所用的积分方法, 分别计算出时间步长分别为  $t=0.001, 0.01$  秒,  $0.1$  秒和  $1$  秒时的精度。将结果专门填入与表 4 类似的表中。请讨论: 对两种飞机, 哪种方法随着步长下降可显示出预期的全球订货? 并做出解释。

**解答:** 表 4 和 5 为得到的精度结果。对于精确度为  $p$  的方法, 其误差  $E$  为  $O(\Delta t^p)$ 。

因此，步长分别为 $\Delta t_1$ 和 $\Delta t_2$ 时，其误差之比应为：

$$\frac{E(\Delta t_2)}{E(\Delta t_1)} = \left( \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \right)^p$$

对所研究的精度，步长比值均为 1/10，因此，我们期待它们的误差之比为  $(1/10)^p$ 。但是很重要的一点是这种误差比值在 $\Delta t$ 足够小的时候才能观测到，其原因是精度估计是建立在泰勒级数分析基础上的，它只在 $\Delta t$ 很小时才正确。

我们首先看表 4 中波音 747 的向前欧拉方法的结果(AB1)。AB1 是种一阶精度的方法( $p=1$ )，因此，其误差将按 10 倍下降。对最大的步长  $t=1.0s$ ，注意到其误差非常大。实际上，根据第二个家庭作业里的分析，向前欧拉方法在 $\Delta t > 0.1s$  时就会变得不稳定。因此，在最大时间步长情况下，向前欧拉方法是不稳定的，误差会随着每一次迭代增大而使得结果很不精确。时间步长从 $\Delta t=1$  下降到 $\Delta t=0.1s$  时误差下降因子远大于 10，这也很可能是大时间步长不稳定的直接反应。时间步长从 $\Delta t=0.11$  下降到 $\Delta t=0.01s$  时，误差下降因子很接近 10，在最精细的时间步长情况下甚至比 10 大。因此，AB1 在时间步长最小的情况下将达到渐近速率。

作为另一个例子，我们再看看波音 747 的 AM2 方法的结果。AM2 是种二阶精度的方法( $p=2$ )，因此，其误差将按 100 倍下降。从表 4 中可以清楚看到这样的结果。

RK4 算法同样体现了计算机有限精度的影响。这是一种四阶精度的方法，因此误差应当按  $10^4$ 倍下降。这种下降在除了最小时间步长的其他情况下都能看到。在步长从 0.1 下降到 0.01 时，误差只下降了 40 倍。由于计算机本身的精度有限，因此再减小时间步长并不能进一步提高精确度。很明显，尽管如此，在步长等于 0.1 的时候结果已经很精确了。

F-104 的结果大体上与波音 747 相似。但是，整体精度都有所下降。并且 AB1 和 AM1 的结果都没有渐近行为。这种精度的下降也反映了该物理系统的不稳定，从而使得相对于稳定的波音 747 而言，它具有更大的振幅和误差。

$\Delta t$	AB1	AB2	AM1	AM2	RK2	RK4
1.0	1.23e+1	1.98e-0	6.20e-2	2.93e-2	7.95e-2	1.44e-3
0.1	3.98e-2	1.60e-3	2.04e-2	3.20e-4	6.40e-4	1.49e-7
0.01	2.86e-3	1.59e-5	2.68e-3	3.20e-6	6.40e-6	1.49e-11
0.001	2.78e-4	1.60e-7	2.76e-4	3.20e-8	6.40e-8	3.77e-13

表 4: 波音 747 的精度收敛性研究

$\Delta t$	AB1	AB2	AM1	AM2	RK2	RK4
1.0	4.04e+9	1.55e+13	6.23e-1	7.22e-1	2.66e+10	6.23e-1
0.1	3.11e+2	8.57e-1	6.59e-1	1.52e-1	3.21e-1	6.71e-4
0.01	5.72e-1	7.76e-3	3.07e-1	1.55e-3	3.10e-3	6.70e-8
0.001	4.26e-2	7.75e-5	4.00e-2	1.55e-5	3.10e-5	2.57e-11

表 5: F-104 的精度收敛性研究

为了比较这些方法的效果，我们需要一个不依赖于计算机、网络、编译程序的软件版本等等的单一的‘货币’。我们把向前欧拉方法进行一次单独迭代所需要的计算时间作为工作量单元(WU)。为了找到其他方法的 WU，将每种方法运行几百次迭代，计算出每次迭代的平均时间。**确保这些计算都在同一台计算机上，并且不间断地顺序进行**，这样可以尽量避免客观条件改变对计时带来的影响。在 Matlab 中，用来获得当前时间的命令为 **CPUTIME**，可以查看 Matlab 的帮助了解其用法。然后用向前欧拉方法得到的时间对这些时间进行归一化得到每种方法进行一次迭代的 WU。如表 6 那样对每种方法的 WU 进行纪录。注意：参考家庭作业 2 的参考解答中的讨论，看看期待的结果将是怎样。如果你得到了与参考解答中讨论部分不同的结果，原因可能是程序有缺陷(bug)或者没有有效地利用方法。

**解答：**所有的隐式方法都是在开始迭代之前先果断地对矩阵求逆来实现的。这是可能的，因为待解系统与常矩阵  $A$  成线性关系。这样一来，不同算法的时间成本主要是每次迭代需要的矩阵与向量乘积的数目的函数。对 AB1, AB2 和 AM1, 每次迭代都只需要进行一次矩阵向量乘积。注意，在我的方法里 AB2 并不需要两次矩阵向量乘积，因为  $n-1$  次迭代的力函数可以存储起来而不需要重新计算。AM2 需要对隐式和显式部分都进行矩阵向量乘积。最后，每种 Runge-Kutta 方法都需要在每一步进行一次矩阵向量乘积。表 6 中的 WU 就反应了这种效应。注意：为了更好的理解这里的讨论，看看 Matlab 中的运行是很有用的。

	AB1	AB2	AM1	AM2	RK2	RK4
WU	1.00	1.14	1.05	1.98	1.88	4.45

表 6: 各种积分方法单次迭代的 Work Unit

• 根据表格中精度研究的结果和已知的每种算法的工作成本，估计欲使 $\beta$ 的精度达到 0.0001 弧度，各种方法所需要的总工作量(用 WU 表示)。(你可以用一个象表 7 那样的表格。根据你对这些方法的理解，试解释 WU 结果以及他们的精度和稳定性。)。你推荐用哪种方法，可以有效解决飞机的水平动力学方程？

**解答:** 要估计达到某一固定精度所需要的工作量，我们需要对前面的精度计算公式进行插值。为此，我们将假设所有的方法都已经达到其渐近阶数，然后从最近的误差水平（它刚刚大于要求的 0.0001）外推。例如，考虑波音 747 的 RK2 方法结果。从表 4 可以看到，对 RK2， $\Delta t=0.1$  时  $E=6.4 \times 10^{-4}$ 。整理方程(5)可以得到所需精度条件要求的  $\Delta t$ ：

$$\Delta t_2 = \left[ \frac{E(\Delta t_2)}{E(\Delta t_1)} \right]^{1/p} \Delta t_1$$

因此，设  $\Delta t_1=0.1\text{s}$ ， $E(\Delta t_1)=6.4 \times 10^{-4}$ ， $E(\Delta t_2)=1 \times 10^{-4}$ ， $p=2$ ，得到  $\Delta t_2=0.0395\text{s}$ 。

然后，为求工作量，我们再计算需要的迭代次数，乘以 WU 便得到总的工作时间。对 RK2，我们得到：

$$WU_{RK2:747} = \frac{T}{\Delta t} WU_{RK2} = \frac{30}{0.0395} 1.88 WU = 1427 WU$$

对两种飞机的各种方法计算结果见表 7。

机型	AB1	AB2	AM1	AM2	RK2	RK4
747	$8.34 \times 10^4$	$1.37 \times 10^3$	$8.69 \times 10^4$	$1.06 \times 10^3$	$1.43 \times 10^3$	$2.60 \times 10^2$
F-104	$1.28 \times 10^7$	$3.01 \times 10^4$	$1.26 \times 10^7$	$2.34 \times 10^4$	$3.14 \times 10^4$	$2.15 \times 10^3$

表 7:  $\beta$ 精度达到 0.001 弧度所要求的 WU

从表 7 的结果可以看出，RK4 方法几乎比别的任何方法工作量少一个数量级，因此它显然是解飞机水平动力学方程效率最高的选择。其原因是你只需比其它方法增加一点工作量就可以得到更高的精度。如果对精度有更高要求的时候，更推荐用 RK4 法。