16：901 概率论方法实例

——涡轮叶片中的热传导问题

日期：5 月 9 日下午 2 点

1. 背景知识

在涡轮工作的第一个阶段，叶片受燃烧室里的热气体产生的高温气流影响。因此，涡轮叶片常通过泵入叶片通道中的低温空气进行内部冷却。在这一实例中，。我们将利用 project 3 中建立的有限元热传导分析方法，定量讨论涡轮叶片中温度不确定带来的影响。这种叶片以及我们所考虑的问题在大型涡轮发动机中是非常典型的。

热传导方程是关于温度的扩散方程，

$$\nabla^2 T = 0$$

而传热率可由以下方程得出，

$$\vec{q} = -k\nabla T$$

其中 k 是叶片材料的热传导率。边界条件为对流传热条件，对叶片表面，传出的热流为：

$$\vec{q}\cdot\vec{n} = h_{ext}(T - T_{ext})$$

h_{ext} 为对流传热系数，T_{ext} 为叶片外部的温度。注意 $\vec{n}$ 为叶片的外法线方向单位矢量，因此 $\vec{q}.\vec{n}$ 代表流出叶片的热流。对冷却通道其热流也是类似的，

$$\vec{q}\cdot\vec{n} = h_{\text{int}}(T - T_{\text{int}})$$

同样，$\vec{n}$ 为叶片的外法线方向单位矢量(指向冷却通道)，因此 $\vec{q}.\vec{n}$ 代表流出叶片的热流。

对于概率分析方法，我们只用了粗糙的网格(g0012coarse.mat)，因为用这种网格与用最细致的网格计算出来的温度只相差几度。注意，这里已经利用弦长 L 将叶片的尺度无量纲化。因此，坐标值实际为 x/L 和 y/L。在这个实例中，你还需要知道翼弦长的取值

$$L = 0.1m$$

剩下所有的输入参数都有不确定性。由于概率分析方法是在涡轮设计的前期进行，可用的信息十分有限，因此我们将使用三角概率密度函数。表 1 给出了每个参数的最大和最小值。我们假设所有参数的最可几点为最大值和最小值的中点。

2. 任务

2.1 对称三角分布的积累概率函数和百分位数

这里的任务是推出在这一实例中进行蒙特-卡洛模拟所需要的积累概率密度函数（CDF）和百分位数（即CDF的逆）。输入的分布都是对称三角分布，且对随机的输入变量x，其最大值(即x_{max})和最小值(x_{min})都是已知的。特别地：

1. 确定对称三角分布的积累概率密度函数 CDF(x)

2. 确定对称三角分布的u百分比x_u，其定义为：$u=CDF(x_u)$.

参数	最小值	最大值
$T_{ext}(C)$	1200	1400
$h_{ext}(W/m^2C)$	2000	4000
$\mathrm{T}_{\mathrm{int}}(C)$	150	250
$h_{ext}(W/m^2C)$	500	1500
$k(W/mC)$	20.0	23.0

表 1：输入参数不确定性说明。最可几值假设为最大值与最小值的中值。

2.2 标称模拟

利用在线提供的 Matlab 中关于热传导的程序(如果你愿意也可以用自己的程序)，计算并画出在标称 (即：最可几)参数值处叶片中的温度分布情况。确定在标称条件下叶片中温度的最大值和最小值。

2.3 蒙特-卡洛模拟

利用对所有输入的独立三角分布随机变量的蒙特-卡洛模拟，建立一种概率方法。模拟程序需要具备以下功能：

1. 计算并画出温度均方差的分布 $\mu_T(x,y)$ 。

2. 计算并画出温度标准偏差的分布 $\sigma_T(x,y)$ 。

3. 对蒙特-卡洛模拟的每一次迭代（例如对翼尾），计算整个叶片中的温度最小值 $T_{\min}^n$ 和最大值 $T_{\max}^n$ ，其中 n 为对应的迭代次数。

4. 画出 $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的直方图(利用 matlab 中的 hist 函数，并选取 bin=20)。

5. 计算并画出 $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的均方差和标准偏差的关于迭代次数的变化。

将所写或者修改的 matlab 程序作为这个任务的文档保存。同时，运行一个 1000 次的蒙特-卡洛模拟，并画出前面要求的所有结果。比较 $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的平均值和前面预言的最可能值。

2.4 $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的分布

你会发现 $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的分布(即直方图)形状不同。解释出现这种情况的原因(用具体的结果或者数据证明你的论点)。

2.5 误差估计

在 1000 次迭代模拟的基础上，估计预言的 $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的平均值和方差的误差。估计需要进行多少次迭代才可以使得温度的平均值的偏差在 95%的置信度下不超过 1℃。