

16.901: 常微（差）分方程积分方案

清洁核火箭羽焰的涡旋应用

期限：2月25日 下午 2:00

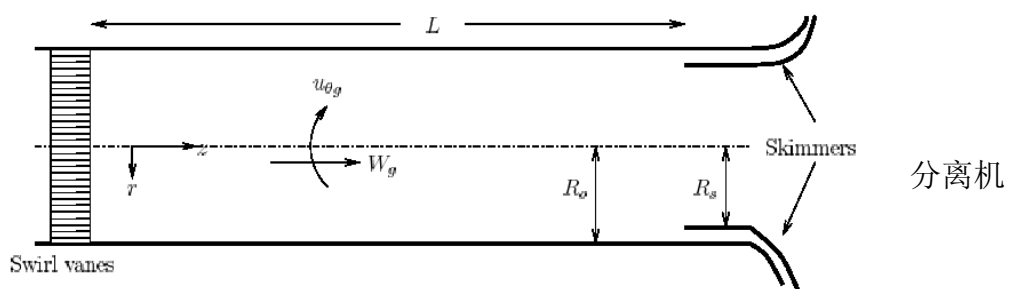
1 背景知识

核热火箭所具有的大推动和高比冲量的结合使它们成为短时段大有效载荷运输的理想候选者。在核热推进后面的基本概念是用铀的临界质量来加热氢气，然后氢气被加速冲出喷嘴。不幸的是由于放射性物质扩散的潜在危险，核热推进有严格的限制。因此极其必要开发一种有效的方法在放射性物质排放到大气之前从羽焰中提取它们。

在本设计中，我们将考虑在火箭羽焰内应用涡旋以达到把重的铀粒子从氢气体中分离出来的目的。基本的思想是：由于气流的旋转，重的粒子将被沿着圆周加速。但因为它们的大密度，这些粒子不可能维持在他们的径向位置上，它们会向羽焰外部运动，在那里它们可以有效地从主要氢气的路径中被提取出来。在本设计中，将展示数值方法来跟踪粒子轨道并确定用涡旋气流分离粒子的可能性。

注意：本设计基于麻省理工学院 David Oh 1993 年的控制理论。

1.1 火箭构造和气流



旋转叶片

图 1：火箭构造和气流

我们将用图 1 所示的常数半径 R_0 和轴向长度 L 来研究火箭的简化结构。假设气流以常速度 W_g 通过燃烧室。旋转叶片设计得可以产生一个立体回旋流，使得

气体的环境速度由下式给定：

$$u_{\theta g} = \Omega r$$

在火箭分离器的出口，分离器被置于半径 R_s 处。此问题的参数由表 1 定义。

参数	定义	值
ρ_g	气体密度	0.3 kg/m ³
ρ_p	粒子密度	12700kg/m ³
a	粒子半径	1 μ m, 10 μ m, 100 μ m
R_0	火箭半径	0.15m
R_s	分离器半径	0.14m
L	火箭长度	1m
W_g	气体的轴速度	1100m/s
μ_g	气体粘性	3 $\times 10^{-5}$ kg/(m sec)
Ω	气体旋转率	5000 rad/sec, 1000 rad/sec

表 1：参数定义和取值。

1.2 粒子轨道方程

粒子位置记作 \vec{x}_p ，粒子运动可表为

$$m_p \ddot{\vec{x}}_p = \vec{F},$$

其中 m_p 是粒子质量， \vec{F} 是在粒子上的作用力,它是压力和拖曳力的合力，

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_d,$$

$$\vec{F}_p = -\frac{4}{3}\pi a^3 \nabla p,$$

$$\vec{F}_d = \frac{1}{2}\rho_g \pi a^2 |\vec{u}_{rel}| \vec{u}_{rel} C_D(Re),$$

$$\vec{u}_{rel} = \vec{u}_g - \vec{u}_p,$$

$$C_D(Re) = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0.4,$$

$$Re = \frac{\rho_g |\vec{u}_{rel}| 2a}{\mu_g}.$$

我们将假设气体沿径向是平衡的，于是在径向只有压力梯度，表示为，

$$\frac{dp}{dr} = \rho_g \frac{u_{\theta_g}^2}{r}$$

最后，如果在粒子的积分过程中，其轨道达到了燃烧室的外半径，则可假设粒子保留在壁附近（在其边界层内）且慢慢地进入分离器。

1.3 粒子分布和清洁效率

对这项工作，我们假设粒子在入口是均匀分布的。我们还假设粒子的初始速度等于气体的轴向速度， w_g 。于是粒子进入回旋流区域时仅有轴向速度。清洁效率定义为被清洁的粒子所占的份额，

$$\eta = \frac{n_p}{N_p}$$

其中 N_p 是粒子总数， n_p 是被分离器去除掉的粒子数。对具有常初始粒子速度条件且均匀分布的情形，可按下式计算，

$$\eta = 1 - \left(\frac{R_\eta}{R_o} \right)^2,$$

其中 R_η 为可被从气流中分离掉的最内层粒子的半径。

2 任务

2.1 量纲分析

对此问题的量纲分析进行研究。特别地，对清洁效率 η 确定控制它的独立的无量纲的参数的数目。然后，确定你在下面设计里要用的特定的无量纲参数。

注意：当独立的无量纲的参数的数目是 1 时，就不用选择用哪个无量纲的参数了。于是，这有助于用某些工程上的判断来完成参数的选择。可以进行若干叠代。

2.2 减为一阶系统

通过引入附加的状态量产生一个耦合的，非线性的一阶常微分方程组可把系统的阶数降为一阶。特别地，选择状态量为质点速度和位置的笛卡尔分量，即：

u_p, v_p, w_p 和 x_p, y_p 及 z_p . 于是, 最终系统将有下列形式,

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_p \\ \dot{v}_p \\ \dot{w}_p \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u(u_p, v_p, w_p, x_p, y_p, z_p, t) \\ f_v(u_p, v_p, w_p, x_p, y_p, z_p, t) \\ f_w(u_p, v_p, w_p, x_p, y_p, z_p, t) \\ f_x(u_p, v_p, w_p, x_p, y_p, z_p, t) \\ f_y(u_p, v_p, w_p, x_p, y_p, z_p, t) \\ f_z(u_p, v_p, w_p, x_p, y_p, z_p, t) \end{bmatrix}$$

请让此方程保留符号形式。不要代入表 1 给定的输入参数特值。

2.3 线性化和特征根

关于时间 $t=\tau$ 线性化基本方程，建立线性化方程组，

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}}_p \\ \dot{\tilde{v}}_p \\ \dot{\tilde{w}}_p \\ \dot{\tilde{x}}_p \\ \dot{\tilde{y}}_p \\ \dot{\tilde{z}}_p \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \tilde{u}_p \\ \tilde{v}_p \\ \tilde{w}_p \\ \tilde{x}_p \\ \tilde{y}_p \\ \tilde{z}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{f}_u(t) \\ \tilde{f}_v(t) \\ \tilde{f}_w(t) \\ \tilde{f}_x(t) \\ \tilde{f}_y(t) \\ \tilde{f}_z(t) \end{bmatrix}$$

其中 A 是 6×6 矩阵， $\tilde{u}_p(t) = u_p(t) - u_p(\tau)$, 其余摄动量也类似。注意：力 \tilde{f} 这一项可以依赖时间，粒子在 $t=\tau$ 的速度和位置，但他们不能依赖于摄动量， \tilde{u}_p 等等。为把初始方程线性化，假设所有摄动量都很小。再次保留线性化的方程的符号形式。

假设粒子的轴向速度在 $t=0$ 时，取初始值 W_g ，计算符号形式的线性化方程的特征根。注意：我们对这些方程的线性化也许要求恒有 $t-\tau$ 很小。所以，相应于长时间性质的特征值也就不大有意义了。幸好对数值稳定性而言，短时标（亦即大的特征值）才是重要的。

相互比较这些特征值隐含的时标和粒子穿越火箭发动机燃烧室的大致时间。在什么条件下问题是刚性的？用表一给定的输入参数指定值，在本研究课题的特例中，问题是刚性的么？如果事，给出产生刚性的条件。

2.4 常差分方程积分方法的实现

按下面数值方法实现非线性质点的常差分方程的积分。

- 一阶和二阶 Adams-Bashforth 方法（注意：一阶=向前 Euler 方法）
- 一阶和二阶方法（注意：一阶=向后 Euler 方法，二阶=梯形法则）
- 二阶和四阶 Rung-Kutta 方法（注意：对二者选择适当的变化。）

对所有方法取常数步长。在书面记录里简述这些方法。特别地，对于隐式的 Adams-Moulton 方法，讨论在每个步长如何求解非线性耦合方程。

2.5 数值精度和计算工作的研究

在这一节里，你要对上述 6 种方法的每一个作精度和计算量的研究。

1. 为比较这些方法的工作量，我们需要一个“通用货币”，它是不依赖于特殊的计算机，网络，编辑软件的版本，等等。我们将用运行一个向前欧拉迭代的计算时间作为我们的工作量单元（WU）。为求出其他方法的迭代 WU，对各种方法运行几百步迭代，并计算一次迭代需要的平均时间。**务必在同一台机器上一个挨一个地进行迭代计算以减小条件改变对时间计算带来的可能的影响。**然后，将这些时间用向前欧拉迭代的计算时间进行标准化，对各种方法的迭代计算 WU。以表格形式报告各种方法的 WU。
2. 用各个方法计算清洁效率 η ，在整个条件域上达精度 0.01（注意，可能的时候务必应用量纲分析的结果）。为此，你先要用具有某个固定步长的质点积分对

一系列初始径向位置计算（上面定义的） R_η 。由此，可以得出 η 。然后，减小步长的大小（比如减小 50%），重新运行程序求 R_η 和 η 。如果结果在 0.01 精度内保持一致，则达到精度要求。然后，对每种方法和各种要求的操作条件的组合，在类似的表 2 中报告数据结果。

方法	Δt_{\max}	WU/轨道	在 Δt_{\max} 的 η 估计值
AB1			
AB2			
AM1			
AM2			
RK1			
RK4			

表 2: 在条件 X 下，各种方法所需工作量和 η 的估计值

3. 对不同的积分方法，给出精度和工作量研究结果的完整讨论。试根据你对方法以及它们的精度和稳定性的理解阐述 WU 的结果。
4. 对每种方法，用不同的时间步长画出粒子的轨迹。为此，在 (x, y) 平面内画轨迹，因为 z 坐标仅设置结束时间。对任一种方法，你观察了用较大的步长的稳定性问题了么？如果你观察了，这些稳定性极限是否可以用你上述线性化分析得出的特征值以及你关于不同方法的稳定性极限的知识来解释？