

16.901 作业#1

截止日期：2月12日

说明：

这个家庭作业将分两步完成。第一步，请不要借助任何书本或笔记回答问题，时间不超过一个小时。并且，不要为了完成这一步进行任何相关的学习。第二步：可以参考书或者笔记，并且不做时间限制。下面是每一步的具体说明。

闭卷指导：

- 在一个小时内不借助任何书或者笔记完成下面作业。在家庭作业卷上写下你的最直接的反应。
- 这一步并不是要检查你们每一个个体，我只对你们的整体表现感兴趣。我会利用这一步的数据来告知系里预习中可能出现的任何问题。这一步的结果将不计入你的家庭作业成绩(除非象开卷说明中说的那样在开卷的答案中包括了这里的内容)。
- 在回答这些问题的过程中，请使用下面的程序。在解题前先把所有的题目浏览一遍，并在每个问题上写下以下内容：

可以做：表示你可以在不需要任何其他帮助的情况下完成这道题目。

需要书：表示如果你有书或者笔记就肯定可以做，但是如果没书或者笔记情况下不确定怎样求解。

没有线索：表示你不知道从何下手，而且以前也没有接触过类似的问题。

- 在浏览完第一遍后，开始做题，并且在时间允许的情况下尽可能多的做“可以做”的题。然后，如果有时间剩余，可以尝试做“需要书”的题。

开卷指导：

- 完成一个小时的闭卷作业后，你可以借助你的笔记或者其他的参考资料完成这些习题。
- 用另外的纸(而不是作业题纸)写开卷答案。

•如果你认为你在第一步就把问题正确回答了,你可以在这一步中略过这些题目。
在这种情况下,可以在你的答卷上写上“参看闭卷答题纸”。也就是说,你在这一
步中只需要做你在第一步中解得不正确或者没有解的题。

•你的家庭作业成绩将参考你的开卷结果(包括你选择的闭卷中可用的结果)。

问题:

1. 令 $f(x) = \cos x + \cos x^2$, 计算对 $f(x)$ 在 $x=0$ 做泰勒级数展开的前三项, 即,

求出下面式子中的 c_0, c_1, c_2 : $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \text{更高阶项}$

2. 改写以下二阶非线性常微分方程:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \dot{x}\dot{y}^2 + x &= t^2 \\ \ddot{y} + \dot{y} + \dot{x} + xy &= 0\end{aligned}$$

使之成为耦合的一阶常微分方程组形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z_1, z_2, z_3, z_4, t) \\ f_2(z_1, z_2, z_3, z_4, t) \\ f_3(z_1, z_2, z_3, z_4, t) \\ f_4(z_1, z_2, z_3, z_4, t) \end{bmatrix}$$

3. 证明: 如果 $u(a) = u(b) = 0$, 那么下式成立:

$$\int_a^b u \frac{d^2v}{dx^2} dx = - \int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

提示: 利用分步积分公式。

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=x^*$ 时具有最小值, 那么 $f(x)$ 的一阶和二阶导数在 $x=x^*$ 时是
怎样的情况?

5. 设 x 是均值为 μ_x , 标准差为 σ_x 的随机变量, 求函数 $f(x) = a + b(x)$ (其中 a, b 为常数) 的均值 μ_f 和标准差为 σ_f 。

6. 考虑下列线性常微分方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \text{其中 } A = \begin{bmatrix} -1 & 20 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

初始条件为: $z_1(0) = 1$, 和 $z_2(0) = 100$ 。

- (a) 求 A 的特征根.
- (b) 状态量 (即和) 的模是否随着 $t \rightarrow \infty$ 而衰减?
- (c) 状态量是否振动? 如果是, 周期是多少?

7. 对前面给出的方程组, 确定在给定的初始条件下 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 的解析解。