

作业 5 解答

16.901

问题 1:

本问题加权残差的表达式从下面的式子开始:

$$\int_0^L w(u \frac{\partial T}{\partial x} - f) dx = 0$$

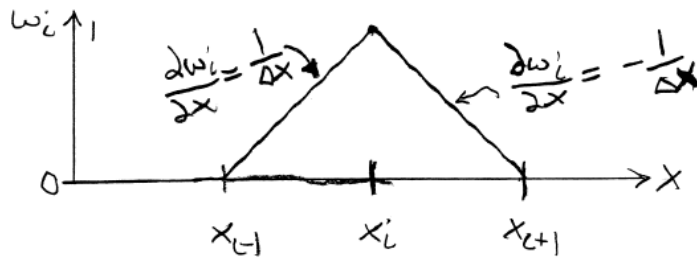
$$\int_0^L wu \frac{\partial T}{\partial x} dx = \int_0^L wf dx$$

左端的部分积分给出了期望的结果:

$$[wuT]_0^L - \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} u T dx = \int_0^L wf dx$$

注意: 这个结果是真实的, 因为 u 是常量。当 $u = u(x)$ 时, 结果稍有不同。对于

一个带有节点基的线性单元来说, w_i 通常是 “帐篷” 形状:



在一个线性单元里, 解从 x_{i-1} 到 x_{i+1} 具有如下形式:

$$T(x) = \begin{cases} T_{i-1} + \frac{x-x_{i-1}}{\Delta x} (T_i - T_{i-1}) & x_{i-1} < x < x_i \\ T_i + \frac{x-x_i}{\Delta x} (T_{i+1} - T_i) & x_i < x < x_{i+1} \end{cases}$$

如果我们假设 $f(x)$ 在每一个单元里线性地变化 (注意: 作业里说的随 x 线性变化是一种更简单的情况, 这里要求的线性化只在一个单元里, 但是允许 f 的斜率在单元之间变化), 那么, $f(x)$ 就与上面给出的 $T(x)$ 具有相同的性质。

如果 i 不是在边界点上, 那么, 由 $w_i(0) = 0$ 和 $w_i(L) = 0$ 可推出 $[w_i u T]_0^L = 0$ 。

我们需要的下一项是:

$$\begin{aligned}
-\int_0^L \frac{\partial w_i}{\partial x} u T dx &= -\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial w_i}{\partial x} u T dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial x} u T dx \\
&= -\frac{u}{\Delta x} \int_{x_{i-1}}^{x_i} T dx + \frac{u}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} T dx
\end{aligned}$$

同样的，积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} T dx$ 和 $\int_{x_i}^{x_{i+1}} T dx$ 可以被重新写为：

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} T dx &= \frac{1}{2} (T_{i-1} + T_i) \Delta x \\
\int_{x_i}^{x_{i+1}} T dx &= \frac{1}{2} (T_i + T_{i+1}) \Delta x \\
\Rightarrow -\int_0^L \frac{\partial w_i}{\partial x} u T dx &= \frac{u}{2} (T_{i+1} - T_{i-1})
\end{aligned}$$

最后，我们来求 $\int_0^L w_i f dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^L w_i f dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} w_i f dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_i f dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{\Delta x} \right) \left[f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x} (f_i - f_{i-1}) \right] dx \\
&\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(1 - \frac{x - x_i}{\Delta x} \right) \left[f_i + \frac{x - x_i}{\Delta x} (f_{i+1} - f_i) \right] dx
\end{aligned}$$

考虑第一个积分，定义 $\xi = \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x}$ ， $d\xi = \frac{1}{\Delta x} dx$

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{\Delta x} \right) \left[f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x} (f_i - f_{i-1}) \right] dx \\
&= \int_0^1 \xi \left[f_{i-1} + \xi (f_i - f_{i-1}) \right] (\Delta x d\xi) \\
&= \Delta x \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 f_{i-1} + \frac{1}{3} \xi^3 (f_i - f_{i-1}) \right\} \Big|_0^1 \\
&= \Delta x \left(\frac{1}{6} f_{i-1} + \frac{1}{3} f_i \right)
\end{aligned}$$

对于 $\int_{x_i}^{x_{i+1}} w_i f dx = \Delta x \left(\frac{1}{3} f_i + \frac{1}{6} f_{i+1} \right)$ 有类似的导数

因此，将所有的结果结合起来，得到：

$$\boxed{\frac{u}{2}(T_{i+1} - T_{i-1}) = \frac{\Delta x}{6}(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1})}$$

问题 2

单元 i 的权函数是：

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w_i \left(u \frac{\partial T}{\partial x} - f \right) dx$$

由分部积分得：

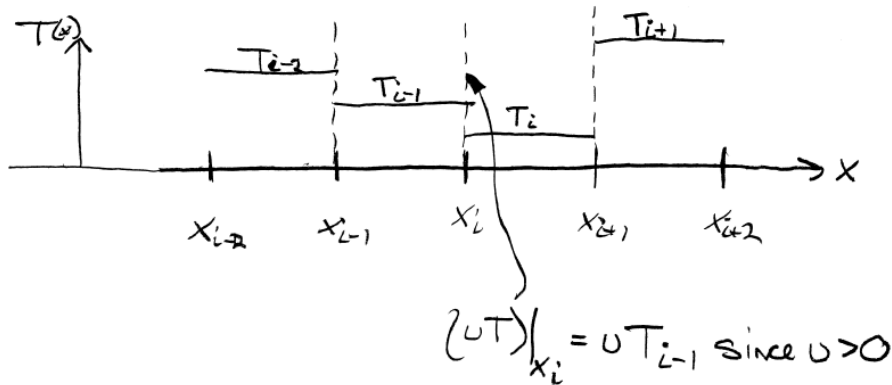
$$[w_i u T]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial x} u T dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_i f dx \quad (*)$$

对于常数单元， $w_i = 1$ 且 $\frac{\partial w_i}{\partial x} = 0$ 。因此，我们有：

$$[uT]_{x_i}^{x_{i+1}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx$$

而 x_i 处的流量为： $(uT)|_{x_i} = uT_{i-1}$ ，相似的， $(uT)|_{x_{i+1}} = uT_i$

注意，为了看清楚这一点，考虑下面 $T(x)$ 的图



(这里我们使用逆风值去定义 x_i 处的流量)

同样，因为 f 是 x 的线性函数， $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})\Delta x$ ，因此，最终得到：

$$[uT]_{x_i}^{x_{i+1}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx$$

$$(uT)_{x_{i+1}} - (uT)_{x_i} = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})\Delta x$$

$$uT_i - uT_{i-1} = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})\Delta x$$

$$\Rightarrow u(T_i - T_{i-1}) = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})\Delta x$$

问题 3

在单元 i 中，利用 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 处的 T 和 $\frac{\partial T}{\partial x}$ 的基得到的线性解为：

$$T(x) = T_i + \left(x - x_{i+\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \text{其中, } x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$$

因此，在一个单元中存在两种函数的形状：

$$T(x) = T_i w_{1i} + \frac{\partial T}{\partial x_i} w_{2i}(x)$$

$$\text{其中, } w_{1i}(x) \equiv 1 \quad \Rightarrow \frac{\partial w_{1i}}{\partial x} = 0$$

$$w_{2i}(x) \equiv x - x_{i+\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \frac{\partial w_{2i}}{\partial x} = 1$$

那么，由问题 2 中的 (*) 式，我们可以求出 w_{1i} ：

$$\left[w_{1i} u T \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial w_{1i}}{\partial x} u T dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_{1i} f dx$$

$$(uT)_{x_{i+1}} - (uT)_{x_i} = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})\Delta x$$

逆风流量一定在每个单元中包括梯度，因此：

$$(uT)_{x_i} = u \left(T_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial T}{\partial x_{i-1}} \right)$$

$$(uT)_{x_{i+1}} = u \left(T_i + \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u \left[T_i - T_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial T}{\partial x_{i-1}} \right) \right] = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) \Delta x}$$

类似地，对于 w_{2i} ，我们可以得到：

$$\begin{aligned} & [w_{2i} u T]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial x} u T dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_{2i} f dx \\ & \left(\frac{1}{2} \Delta x \right) (u T)_{x_{i+1}} - \left(-\frac{1}{2} \Delta x \right) (u T)_{x_i} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1) u T dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x - x_{i+\frac{1}{2}} \right) f dx \\ & \underbrace{\frac{1}{2} \Delta x u \left(T_i + \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta x u \left(T_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial T}{\partial x_{i-1}} \right)} - \underbrace{u T_i \Delta x} = \underbrace{\frac{1}{12} \Delta x^2 (f_{i+1} - f_i)} \end{aligned}$$

为使上式更简洁一些，我们在两边同时除以 $\frac{1}{2} \Delta x$ 得：

$$-u \left(T_i - \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + u \left(T_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial T}{\partial x_{i-1}} \right) = \frac{1}{6} \Delta x (f_{i+1} - f_i)$$

问题 4

(1) 显然，连续 Galerkin 方法与中心差分格式相关，尽管解是建立在一个包括

f_{i-1} 和 f_{i+1} 的平均值的基础之上，导数近似值均为 $\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$ 。

(2) 常数单元不连续 Galerkin (DG) 的情况也同一次逆风格式相同。此外，源条件不仅仅是一个点值。

一次逆风 $\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = f_i$

DG 常数单元 $\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1})$

可见线性单元 DG 情况与其它格式非常的不同。