

实例#2 示范解

期限：4月2日下午2点

1. 背景知识

在这个实例中，我们将模拟可变面积管道中的可压缩无粘滞流体。我们的目标是在变化网格大小以及不同流体条件下，增加对应用于本问题的计算流体动力学算法的收敛性的理解。特别是我们将用向前欧拉时间步长算法实现一阶逆风空间近似。

管道横截面具有常横截面积，它经过一段长度光滑地收缩到管喉，再光滑地扩展到最终的常横截面积。所指定的几何形状由以下式给出：

$$\text{For } 0 < x < x_1 : A(x) = A_0$$

$$\text{For } x_1 < x < x_2 : A(x) = A_0 + \frac{1}{2}(A_1 - A_0) \{1 - \cos[\pi(x - x_1)/(x_2 - x_1)]\}$$

$$\text{For } x_2 < x < x_3 : A(x) = A_1 + \frac{1}{2}(A_2 - A_1) \{1 - \cos[\pi(x - x_2)/(x_3 - x_2)]\}$$

$$\text{For } x_3 < x < x_4 : A(x) = A_2$$

在这个实例的问题中，我们取：

$$x_1=1m, x_2=2m, x_3=3m, x_4=4m,$$

$$A_0=10m^2, A_1=8m^2, A_2=12m^2$$

流体在经过管道时，从入口到出口设置了一个压力差。特别是在入口处，我们假设总压力和总温度与海平面处大气条件相等：

$$P_{0inlet} = 101,327N/m^2$$

$$T_{0inlet} = 288.15K$$

在出口处，我们将对三种不同的静压力求解：

$$P_{outlet} / P_{inlet} = 0.70, 0.90 \text{ 和 } 0.995$$

准一维的欧拉方程可以写成以下控制体积形式：

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_R} U A dx + F(U(x_L))A(x_L) - F(U(x_R))A(x_R) = S \quad (1)$$

其中 U 和 F 分别为：

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{pmatrix}$$

S 是由于面积变化导致的源矢量:

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_L}^{x_R} p dA \\ 0 \end{pmatrix}$$

在家庭作业 4 中已经提到, ρ 是密度, u 为流体速度, p 为压力, E 为总能量。 H 为总的焓, 并与前面的量存在以下关系:

$$H = E + \frac{p}{\rho}$$

注意, 总能量 E 和总的焓 H 与能量 e 和焓 h 的关系如下:

$$E = e + \frac{1}{2}u^2$$

$$H = h + \frac{1}{2}u^2$$

为了使方程封闭, 我们假设这里的流体为气体, 并可以认为是理想气体。这样的话, 压力和能量的状态方程可以写为:

$$p = \rho RT \quad (2)$$

$$e = c_v T \quad (3)$$

其中 R 为气体常数, T 为温度, c_p 为定容热容。另一个很有用的热力学量为定压热容, c_p , 它与 R 和 c_p 的关系为:

$$c_p - c_v = R$$

另外, $\gamma = c_p / c_v$ 为热容比(也叫绝热指数)。对空气, 我们假设:

$$\gamma = 1.4 \quad R = 287.06 m^2 (s^2 K)^{-1}$$

正如家庭作业#4 中所说的, 对于理想气体, 压力与守恒状态向量的关系可表示为

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right)$$

最后，对于理想气体，其声速 c 为：

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

1.1 内部单元的离散方程

我们首先把管道 N_x 等分（产生 N_x 个网格单元）。未知量为每个单元中的状态向量 U 的平均值，也就是你需要对 $j=1, \dots, N_x$ 解 U_j 。

对内部的每一个单元(即 $j=2, \dots, N_x-1$)，我们将用方程(1)的离散形式来求每一次迭代的新的值。尤其对这个实例你需要做的离散化为：

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t^n} V_j + R_j^n = 0 \quad (4)$$

其中 R_j^n 为网格 j 的第 n 次迭代的局部残差向量，其定义为：

$$R_j^n = \hat{F}(U_j^n, U_{j+1}^n) A_{j+\frac{1}{2}} - \hat{F}(U_{j-1}^n, U_j^n) A_{j-\frac{1}{2}} - S_j^n \quad (5)$$

函数 \hat{F} 前面已经给过定义(在 Matlab 程序中叫做：**Fupwind.m**)，并可以从本课程的网页上下载附加附件。这个函数称为流量函数，取了在两个网格面之间的面上左右两边的状态向量（及 v 值）的值，并且返回了在这个面上由适当的逆风状态量确定的流量。如果这里考虑的是标量对流而不是欧拉方程的话，最后的差会近似等于对标准一级逆风离散化的结果。注意：流量函数中输入状态的顺序是很重要的，别反过来。

源函数项近似为：

$$S_j^n = \begin{pmatrix} 0 \\ p_j^n \left(A_{j+\frac{1}{2}} - A_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

V_j 为第 j 个单元的体积，应该近似为：

$$V_j = \frac{1}{2} \left(A_{j+\frac{1}{2}} - A_{j-\frac{1}{2}} \right) \Delta x$$

1.2 时间步长计算

时间步长将被设为以下的 CFL 条件，

$$\Delta t^n = CFL \min_{j=1}^{N_x} (\Delta t_j^n)$$

其中

$$\Delta t_j^n = \frac{\Delta x}{|u_j| + c_j}$$

当你测试确定时间步长的 CFL 数时，冯·诺依曼稳定性分析表明，要维持稳定需要 $CFL \leq 1$ 。我建议在本实例的所有模拟中都取 $CFL=0.9$ 。

1.3 边界条件的实现

在入口处，我们需要利用边界条件来确定状态向量 U_1 。特别地，我们需要有三个可以操作的条件才可以唯一地确定状态向量(因为状态向量有三个成分)。我们假设入口的流体是亚声速的，于是，只有两个条件可以设定，而第三条信息必须从内部状态得到。我们可以设定的这两个条件为入口处的总压力和温度。从 $j=2$ 这个单元开始，我们取速度为 u_2 。这样，这三个条件便可以用来确定状态向量 U_1 ，即

$$U_1 = U(P_{0inlet}, T_{0inlet}, u_2)$$

注意：用这种写法时，就意味着给定总压力，温度和速度后，整体状态向量便可以确定。

在出口处，同样假设为亚声速流体。在这种情况下，我们只能调整一个条件，另外两个需要从内部获得。对这次作业来说，我们将取定静压力，而从内部得到熵 S 和 J_+ (被称为黎曼不变量)。理想气体的熵 S 定义为：

$$S = \frac{P}{\rho^\gamma}$$

J_+ 的定义为：

$$J_+ = u + 2 \frac{c}{\gamma - 1}$$

因此，为了得到出口处的状态向量，需要结合这些条件：

$$U_{N_x} = U(p_{0outlet}, S_{N_x-1}, J_{+N_x-1})$$

1.4 初始条件

对所有情况运行程序时，初始条件取入口处的滞止流的性质。也就是，在进行第一次迭代前假设处处有 $u = 0, p = P_{0inlet}, T = T_{0inlet}$ 。

2. 作业

2.1 离散化的实际应用

在 16.901 的网页上有解准一维欧拉方程的源程序。

2.2 残差收敛性检验

收敛性检验需要满足两个性质：

- 在处理离散解的时候，残差量也应该接近 0。
- 解某一个给定问题时，残差量应不大依赖单元数的多少。

为了导出计算公式，我们给出下面这个分析量：

$$RMS(t) = \sqrt{\int_0^L \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 dx}$$

由于对给定的问题，这个积分只是时间的函数，因此其离散形式应该近似有相同的性质，并且对单元数不敏感。离散形式可以由下式推得：

$$\begin{aligned} RMS^n &= \sqrt{\sum_{i=2}^{N_x-1} \left(\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t}\right)^2 \Delta x}, \\ &= \sqrt{\sum_{i=2}^{N_x-1} (R_{mass\ j}^n / V_j)^2 \Delta x}. \end{aligned}$$

注意：求和只对 $i=2$ 到 N_x-1 进行，原因是在第一和最后一个单元处由于应用了边界条件而没有残差。

为了证明它对网格大小相对较不敏感，图 1-4 给出了 $p_{outlet}/P_{0inlet} = 0.7$ 时所有网格大小的结果。RMS 的直方图表明对所有网格，其绝对水平是一致的。网格

越细RMS残差有更细致的变化，并且需要更多次迭代达才能收敛(后面会讨论这个的原因)。

判断收敛的依据是当前的RMS残差值与对所有的迭代RMS残差的最大值之比小于 10^{-4} 。

$$\text{收敛容许度: } \frac{RMS^n}{\max_{k=1}^n RMS^k} \leq 10^{-4}$$

观测两次模拟的输出性质可以确定这一标准是适宜的，尤其是对输出的总压力 P_{outlet} 和出口处的质量流速率 \dot{m}_{outlet} 。从图 1-4 的跨声速结果可以看到，当迭代到满足收敛容许度条件时，输出可以达到渐近值。因此，基于 RMS 的收敛性检验似乎是合理的。所有的模拟都可以看到类似的行为。

2.3 模拟

对三种不同压力比用不同网格做模拟得到的马赫数分布结果如图 5-7 所示。图 8 和图 9 则分别给出了用所有网格模拟得到的总压力比 p_{outlet}/P_{0inlet} 以及出口处的质量流速率与压力比 p_{outlet}/P_{0inlet} 的关系曲线。

对于不同的网格，所有的解都是明显收敛的，但是两个流在压力比接近 1 时，甚至在网格从 $N_x=80$ 到 $N_x=160$ 的时候仍有明显的变化。例如，对 $p_{outlet}/P_{0inlet}=0.9$ ，网格从 $N_x=80$ 到 $N_x=160$ 时，质量流速率改变了将近 2%。但是，对 $p_{outlet}/P_{0inlet}=0.7$ ，质量流速率只改变了约 0.005%。质量流速率在大压力降下受数字误差影响很小的原因是，流是跨声速的，因此被堵塞住了。由于马赫数远高于 $M=1$ 的极限堵塞条件，数值误差对质量流速率只有很小的影响。这一性质从图 5 和图 6 中的马赫数分布图可以进一步得到确认。对于堵塞的情况，马赫数分布只在激波附近改变，但是对较低的马赫数情形，整个马赫数分布都会上移，因此将表现出质量流速率的增长。

2.4 迭代和计时

对前面一节运行的 12 个模拟，表 1 和表 2 给出了达到收敛需要进行的迭代次数和 CPU 时间。可以发现，迭代次数和 CPU 时间随着网格大小的增加和

$p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}} \rightarrow 1$ 而增加。

迭代次数对网格大小的依赖可以做如下解释。时间步长受 CFL 条件的限制为：

$$\Delta t \propto \frac{\Delta x}{\bar{u} + \bar{c}},$$

其中 \bar{u} 和 \bar{c} 分别为整个域中流体速度和声速的典型值(即平均值)。注意，我们假设了 $\bar{u} > 0$ 。因此，随着空间的减小，时间步长也会减小。由于模拟随时间流逝趋于一个“稳定解”，因此会有一个有限的时刻 T ，在这个时刻状态向量的变化将很小，不依赖于网格的分辨率。因此，收敛的迭代次数为：

$$N_{\text{iters}} = \frac{T}{\Delta t} \propto \frac{T(\bar{u} + \bar{c})}{\Delta x} = N_x \frac{T(\bar{u} + \bar{c})}{L}$$

于是，我们会期待着如果单元数翻倍的话迭代次数也会翻倍。从表 1 可以清楚地看到这一趋势。

CPU 时间对网格大小的依赖可以做如下解释。正如我们看到的，迭代次数应与单元数成比例。进一步，由于需要对每一个单元计算残差，单次迭代需要的工作量也和单元数成比例。这样，我们期待着：

$$\text{Work} = \frac{\text{Work}}{\text{Iter}} \times N_{\text{iters}} \propto N_x \times N_x \frac{T(\bar{u} + \bar{c})}{L} = N_x^2 \frac{T(\bar{u} + \bar{c})}{L}$$

因此，工作量与 N_x^2 成比例。从表 2 中也可以清楚地看到这种依赖关系。

迭代次数和 CPU 时间对 $p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}}$ 的依赖关系可以做如下解释。前面讨论过的达到收敛需要的时间 T 将要求所有的误差已经在整个域中传播。这样，运动最慢的波将被设为 T 。如果我们假设流体平均为亚声速的， $0 < \bar{u} < \bar{c}$ ，则：

$$T \propto \frac{L}{\min(\bar{c} - \bar{u}, \bar{u})}$$

因此，达到收敛需要的迭代次数应为：

$$N_{\text{iters}} \propto N_x \frac{\bar{u} + \bar{c}}{\min(\bar{c} - \bar{u}, \bar{u})}。$$

或者，将上式改写成平均马赫数的形式：

$$N_{iters} \propto N_x \frac{\bar{M} + 1}{\min(1 - \bar{M}, \bar{M})}$$

从图 5-7 可以看到，我们可以非常粗糙地对平均马赫数做如下近似：

$$\bar{M}(p_{outlet} / P_{0inlet} = 0.7) \approx 0.7$$

$$\bar{M}(p_{outlet} / P_{0inlet} = 0.9) \approx 0.5$$

$$\bar{M}(p_{outlet} / P_{0inlet} = 0.995) \approx 0.1$$

这样，我们期待着迭代次数与 N_x 有如下比例关系：

$$N_{iters}(p_{outlet} / P_{0inlet} = 0.7) \propto 5.7 N_x$$

$$N_{iters}(p_{outlet} / P_{0inlet} = 0.9) \propto 3 N_x$$

$$N_{iters}(p_{outlet} / P_{0inlet} = 0.995) \propto 11 N_x$$

这个趋势并不那么明显。但是， $p_{outlet}/P_{0inlet} = 0.995$ 时迭代次数显然是最大，正如之前分析所预测的一样。然而，跨声速的激波的情况收敛得最快，这在前面的分析中并没有被预言。我的猜测是跨声速流体的堵塞性质帮助它收敛，但是这还没有被确认。

	p_{outlet}/P_{0inlet}		
N_x	0.70	0.90	0.995
20	368	791	1746
40	768	1760	3559
80	1584	3705	6592
160	3227	7117	14316

表 1: 不同压力比和网格大小(N_x)时要求的迭代次数

	p_{outlet}/P_{0inlet}		
N_x	0.70	0.90	0.995
20	2.3	5.1	11.2
40	9.4	22.3	43.7
80	38.1	89.7	159.6
160	153.1	336.6	683.7

表 2: 不同压力比和网格大小(N_x)时要求的CPU计时

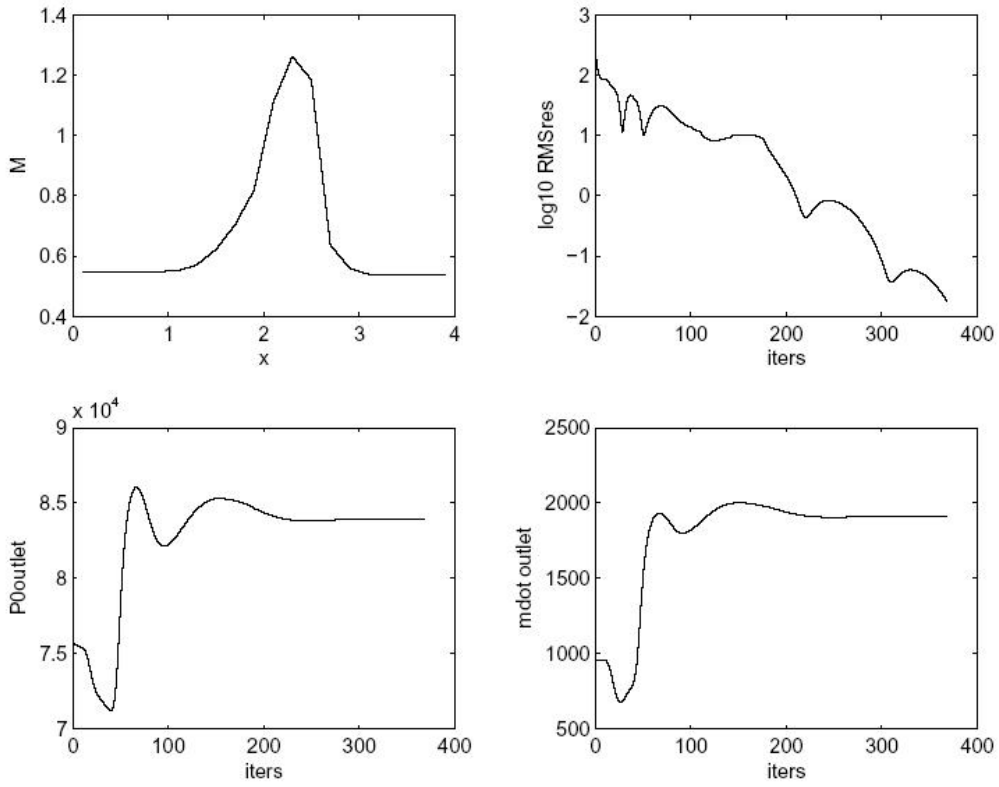


图 1: $p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}} = 0.7$ 且 $N_x=20$ 时的马赫数分布和收敛行为。

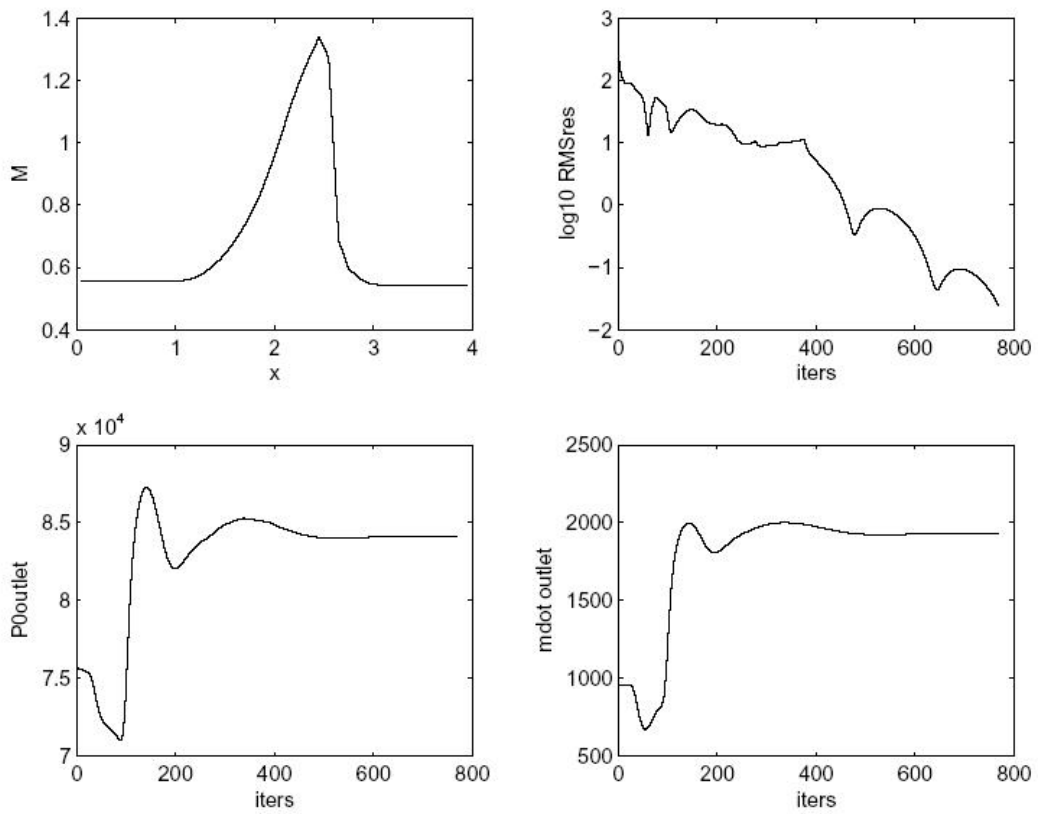


图 2: $p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}} = 0.7$ 且 $N_x=40$ 时的马赫数分布和收敛行为。

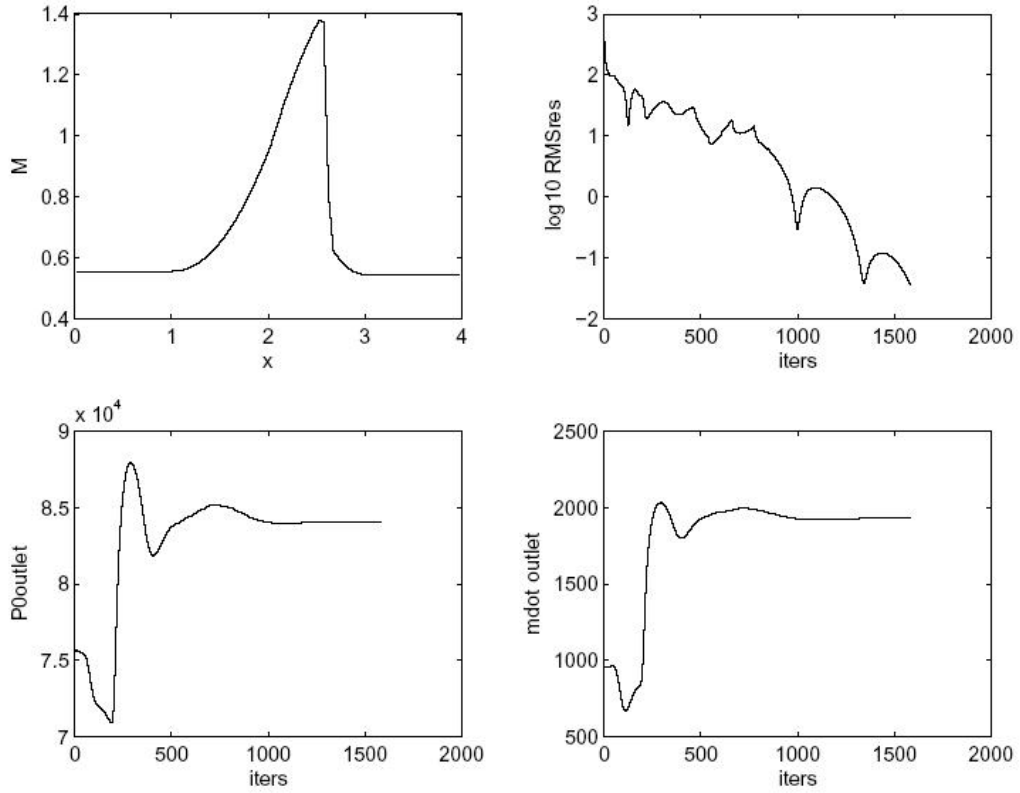


图 3: $p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}}=0.7$ 且 $N_x=80$ 时的马赫数分布和收敛行为。

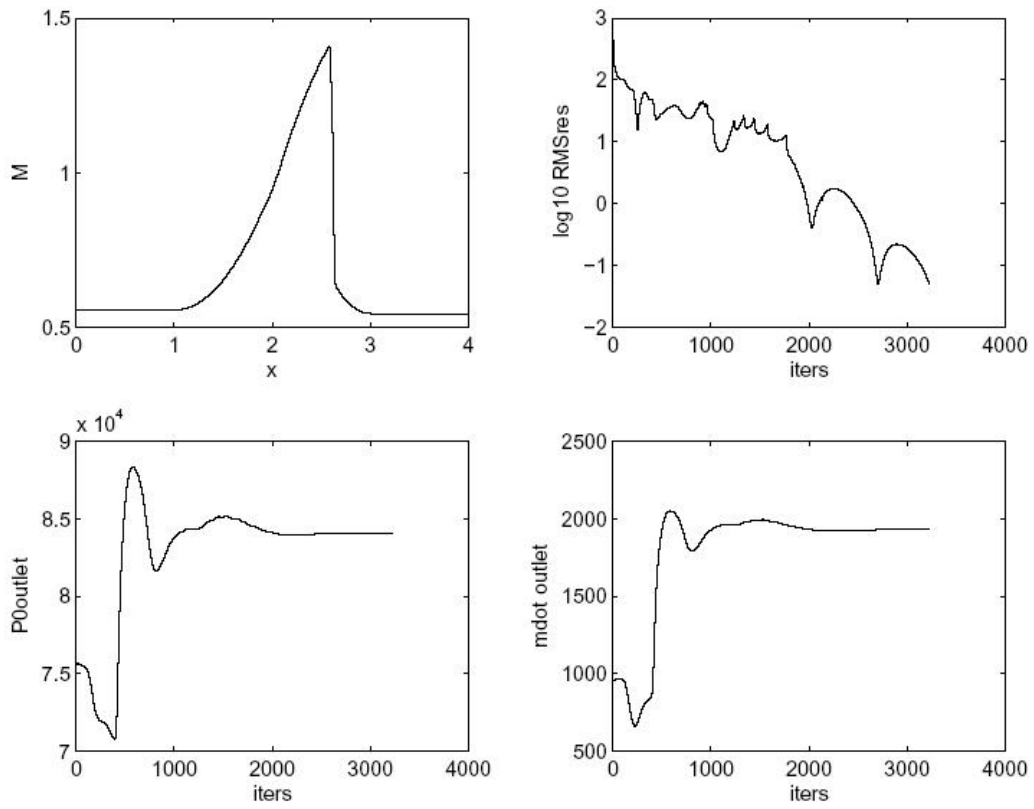


图 4: $p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}}=0.7$ 且 $N_x=160$ 时的马赫数分布和收敛行为。

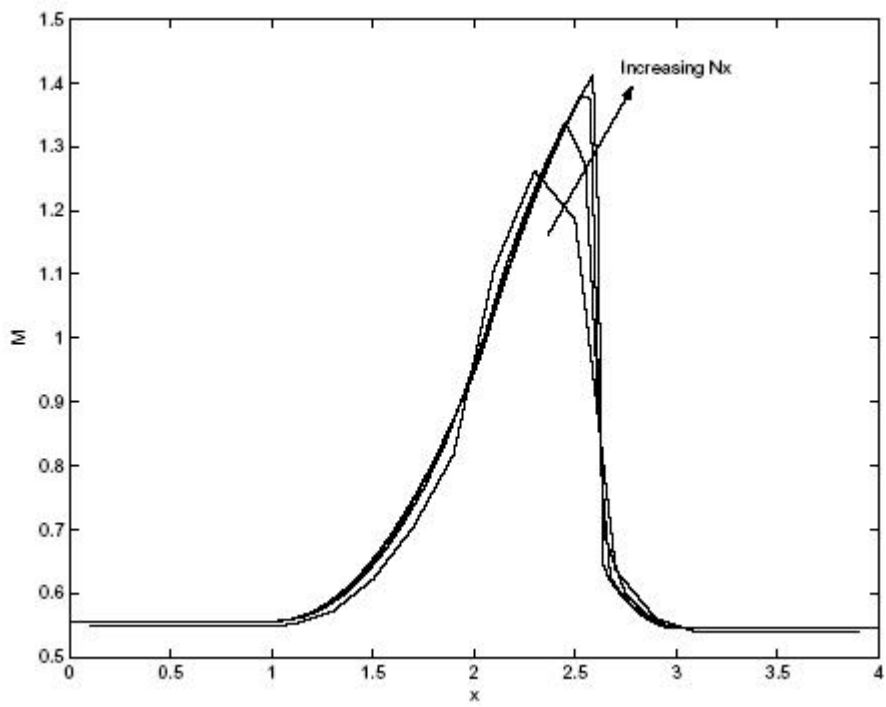


图 5: $p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}} = 0.7$ 时所有网格的马赫数分布图

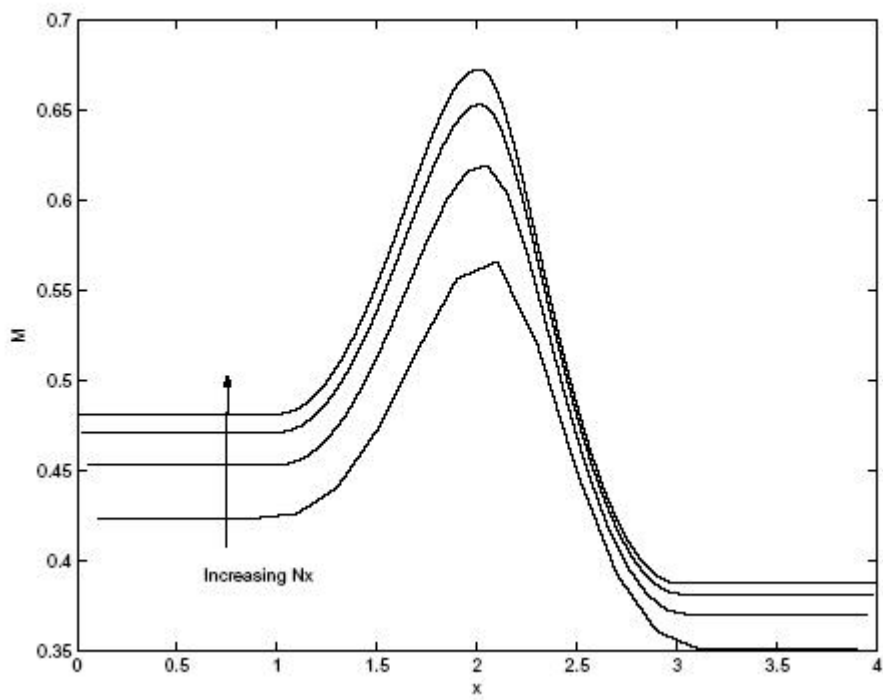


图 6: $p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}} = 0.9$ 时所有网格的马赫数分布图

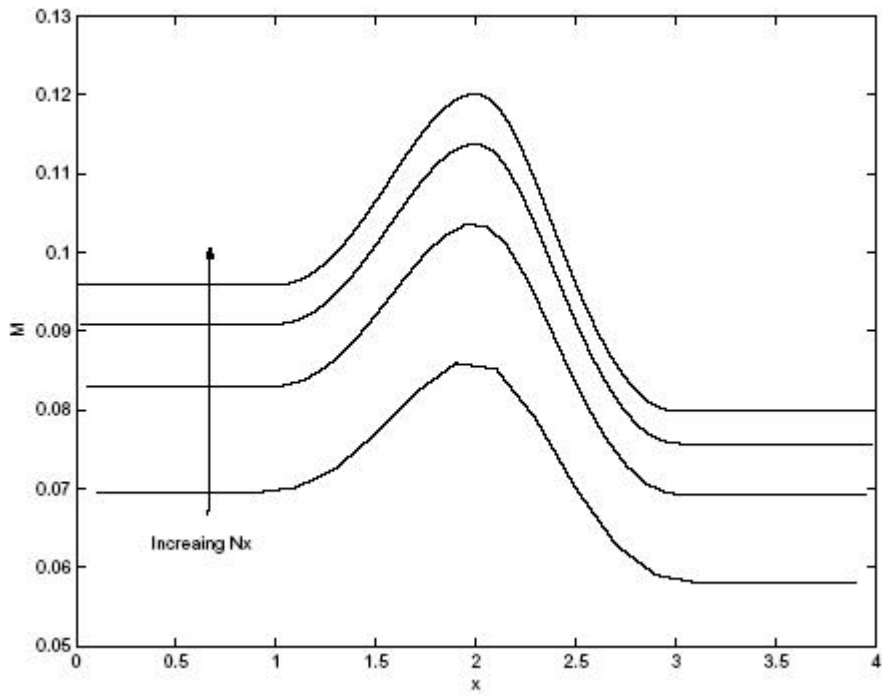


图 7: $p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}} = 0.995$ 时所有网格的马赫数分布图

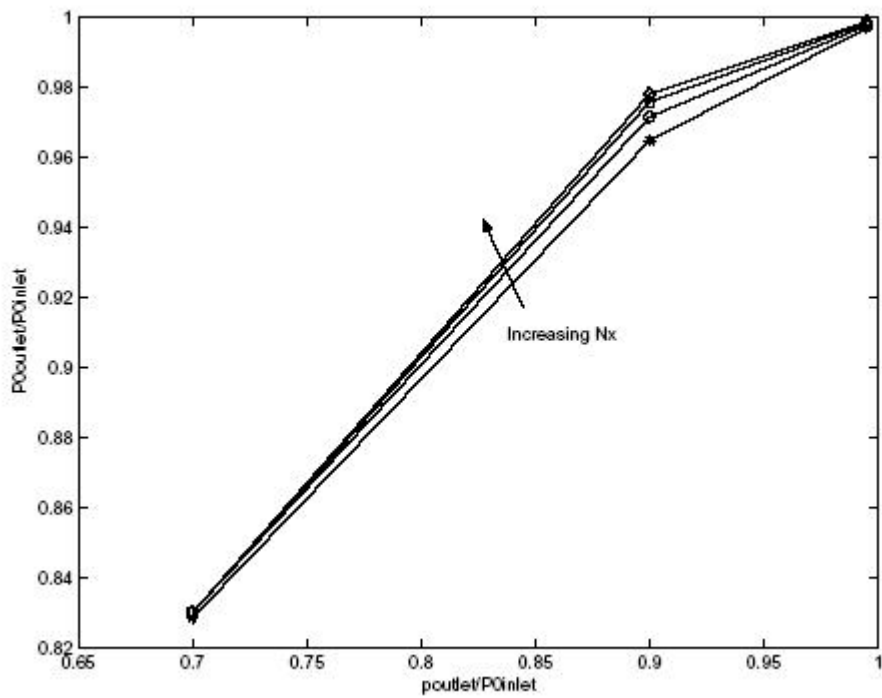


图 8: 出口处总压强随 $p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}}$ 和 N_x 的变化

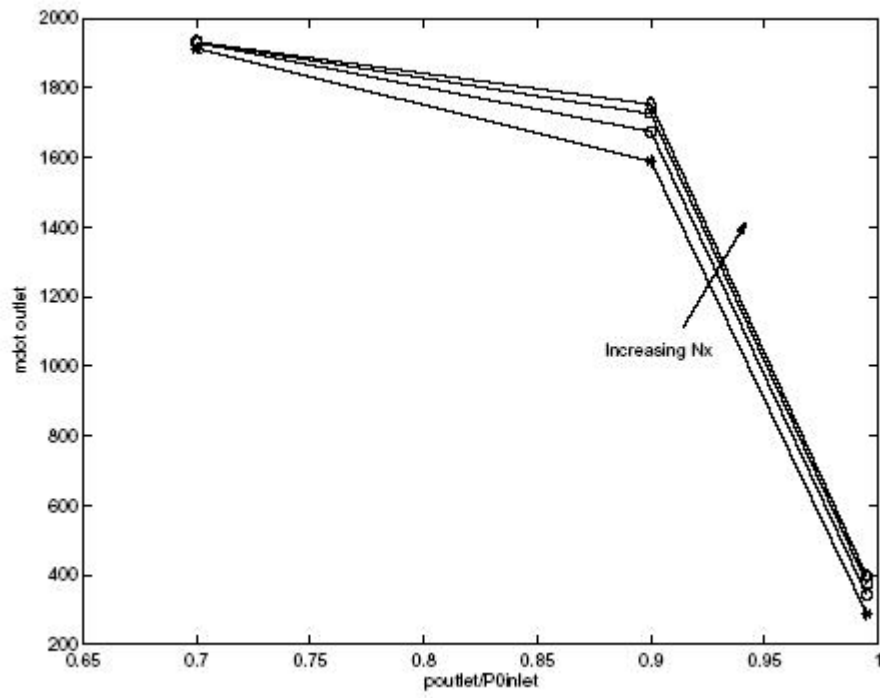


图 9: 出口处质量流速率随 $p_{\text{outlet}}/P_{0\text{inlet}}$ 和 N_x 的变化