

16.901: 有限元方法实例

——涡轮叶片传热示范解

1. 背景知识

在涡轮工作的第一个阶段，叶片受燃烧室里的热气体产生的高温气流影响。因此，涡轮叶片常通过泵入叶片通道中的低温空气进行内部冷却。在这一实例中，我们将用有限元离散化方法模拟内部冷却的涡轮叶片的传热过程。图一为有四个内部冷却通道叶片的示意图，包括粗略的网格单元(三角形)。这种叶片以及我们所考虑的问题在大型涡轮发动机中是非常典型的。

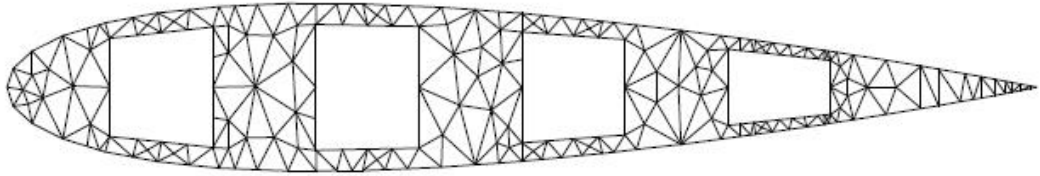


图 1:有冷却通道的叶片几何图形，包括粗糙的网格。

热传导方程是关于温度的扩散方程，

$$\nabla^2 T = 0$$

而传热率可由以下方程得出，

$$\vec{q} = -k\nabla T$$

其中 k 是叶片材料的热传导率。边界条件为对流传热条件。对叶片表面，传出的热流量为：

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = h_{ext}(T - T_{ext})$$

这里 h_{ext} 为对流传热系数， T_{ext} 为叶片外部的温度。注意 \vec{n} 为叶片的外法线方向单位矢量，因此 $\vec{q} \cdot \vec{n}$ 代表流出叶片的热流。在冷却通道处的热流也是类似的，

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = h_{int}(T - T_{int})$$

同样， \vec{n} 为叶片的外法线方向单位矢量(指向冷却通道)，因此 $\vec{q} \cdot \vec{n}$ 代表流出叶片的热流。

在所示的网格中，叶片的尺度已经用弦长 L 无量纲化了。因此，坐标值实际

为 x/L 和 y/L 。温度为：

$$T_{ext} = 1300^{\circ}\text{C} \quad T_{int} = 200^{\circ}\text{C}$$

在这种情况下，热传导系数的无量纲形式为，

$$\frac{h_{ext}L}{k} = 14.0 \quad \frac{h_{int}L}{k} = 4.7$$

2、任务：

2.1 有限元方法实现

首要任务是得到这个问题的有限元方法解算器。我们已经产生了三种形式的网格。数据存在 MATLAB 的数据文件 g0012coarse.mat, g0012medium.mat 以及 g0012fine.mat 中。

对流热传导边界条件的实现是建立在用标准方法实现罗宾型(robin-type)边界条件的基础之上的。特别地，公式(1)的加权残差表达式为：

$$\int_{\Gamma} \omega \nabla T \cdot \vec{n} ds - \int \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla T dA = 0,$$

其中 ω 为权函数。在边界 Γ 上，利用对流热传导边界条件可以将温度的法向梯度与温度建立关系。例如，在内表面上，

$$\begin{aligned} \nabla T \cdot \vec{n} &= -\frac{1}{k} \vec{q} \cdot \vec{n} \\ &= -\frac{h_{int}}{k} (T - T_{int}). \end{aligned}$$

对外表面可以写出类似的式子。因此，加权残差表达式为(乘以-1 之后)

$$\int_{\Gamma} \omega \frac{h_{bc}}{k} (T - T_{bc}) ds + \int \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla T dA = 0,$$

其中 T_{bc} 和 h_{bc} 分别为边界上的气体温度及热传导系数。

边界上的积分项的数值解法如下。首先，注意到边界上除了节点，其余的积分值均为 0。对边界边缘一个给定的节点 i 和 j ，积分可以分成两项，

$$\int_{\Gamma} \omega_i \frac{h_{bc}}{k} (T - T_{bc}) ds, \quad \text{及} \quad \int_{\Gamma} \omega_j \frac{h_{bc}}{k} (T - T_{bc}) ds.$$

对于任意给定的边缘， T_{bc} 和 h_{bc} 均为常数。然而，由于我们利用的是线性单元，温度 T 从 i 到 j 将沿着边线性变化。因此，对于给定的距离 s ，从节点 i 开始沿着

边缘温度为,

$$T(s) = T_i + (T_j - T_i) \frac{s}{l_e}$$

其中 l_e 为边缘的长度。进一步, 由于我们利用了 Galerkin 近似, 权函数也将线性变化, 且在这个节点上为 1, 其它节点上降为 0,

$$\omega_i(s) = 1 - \frac{s}{l_e}$$

$$\omega_j(s) = \frac{s}{l_e}$$

将温度及权函数的表达式代入边界积分, 并积分得,

$$\int_{\Gamma} \omega_i \frac{h_{bc}}{k} (T - T_{bc}) ds = \frac{h_{bc} l_e}{k} \left(\frac{1}{3} T_i + \frac{1}{6} T_j - \frac{1}{2} T_{bc} \right)$$

$$\int_{\Gamma} \omega_j \frac{h_{bc}}{k} (T - T_{bc}) ds = \frac{h_{bc} l_e}{k} \left(\frac{1}{6} T_i + \frac{1}{3} T_j - \frac{1}{2} T_{bc} \right)$$

网格	节点	单元	h_{\max}/L	$T_{\max}(\text{C})$	$T_{\min}(\text{C})$	CPU 时间(秒)
粗糙	230	299	0.024	1299.8	911.4	0.1
中等	424	574	0.016	1299.8	910.1	0.2
细致	1425	2296	0.008	1299.8	908.3	2.1

表 1: 对三类网格的节点数、网格容量, 最大叶片温度及 CPU 时间的比较。

由于这些边界积分项均包含 T_i, T_j , 他们将改变刚度矩阵, 另外, 通过 T_{bc} 项设定右手项。要了解详细的计算方法, 档案文件中有完整注释的 matlab 源程序。

图 2 为三种网格下的温度分布图。从图上可以看出, 机翼后缘的温度最高, 并慢慢向机翼前缘降低。在这些位置, 温度几乎与 1300°C 的外部温度一致。其原因是这些区域的叶片很薄并远离冷流通道。考虑机翼后缘: 由于温度在 1300°C 上下, 并且附近没有冷流, 温度必然近似均匀且由外部温度设定。

2.2 精度及工作量研究

模拟的结果以及要求的 CPU 时间都列在表 1 中。网格的尺度 h_{\max} 定义为所有单元中最大的外接圆半径, 其中单元的外接圆半径为过单元节点的圆的半径。这可以通过将单元的三边中任意两边的中线交叉计算得到。注意, 某一边上的中

线为过该边中点并与其垂直的直线。这些中线到边的节点是等距的。因此，两条中线相交得到一个点，这个点到三个节点均为等距的，即该点为外接圆的圆心。

如表 1 所示，中等的和粗糙的网格的最大网格尺度分别为最精细的网格尺度的两倍和三倍。特别感兴趣的是 T_{\max} 的性质。 T_{\max} 是常数并且不依赖于网格的分辨率。正如前面讨论过的，这是由于在前后机翼边缘区域，其温度决定于外部温度。这样一来，网格的分辨率不影响 T_{\max} 的性质。相对而言， T_{\min} 是变化的，并且随着网格分辨率的增加而降低。由于从中等到精细网格 T_{\min} 的变化(1.8°C)比从粗糙到中等的变化(1.3°C)大，似乎问题并没有完全解决。如果结果接近了渐近解，我们将期待着温度随着网格分辨率的增加下降得更慢。

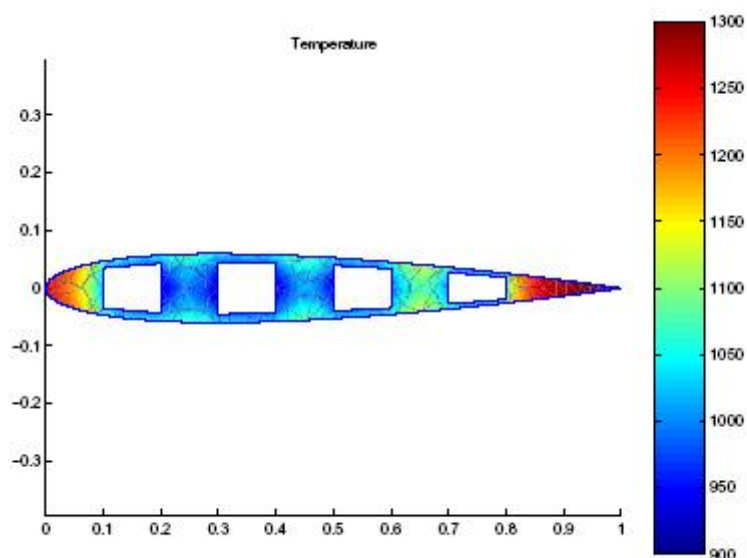
对于 CPU 时间，我们可以期待两个明显的效果。第一，在构造刚度矩阵时，工作量与单元数成正比，同时也将近似与节点数成正比。第二，在处理温度的线性系统时，我们用了 Matlab 中对矩阵的高斯消去法。由于高斯消去工作量为 $O(N^3)$ ，其中 N 为未知量的数目，我们期望部分 CPU 时间正比于节点数的三次方。因此，对大网格(即多节点)，由于 $O(N)$ 的影响相对变小，我们期望 CPU 时间与 N^3 成正比。对两个最小的网格，我们发现 CPU 时间翻倍了。由于节点数也近似翻倍，这暗示着工作量的线性项超过高斯消去时间而占主导。然而，当用到最大的网格时，工作量为变到 2.1s，为原来的 10 倍。由于节点数只是原来的 3.4 倍，这暗示着 CPU 时间已经比 $O(N)$ 增长快多了。简而言之，高斯消去时间在整个工作量中开始占主导。

最后，如果我们希望最终结果精确到 10°C，我们可以使用现有的任意一种网格，因为温度的整个变化也只有大约 3°C。然而，为了进一步确定，我们还需要运行更多的网格，看看温度是否近似为渐近解。

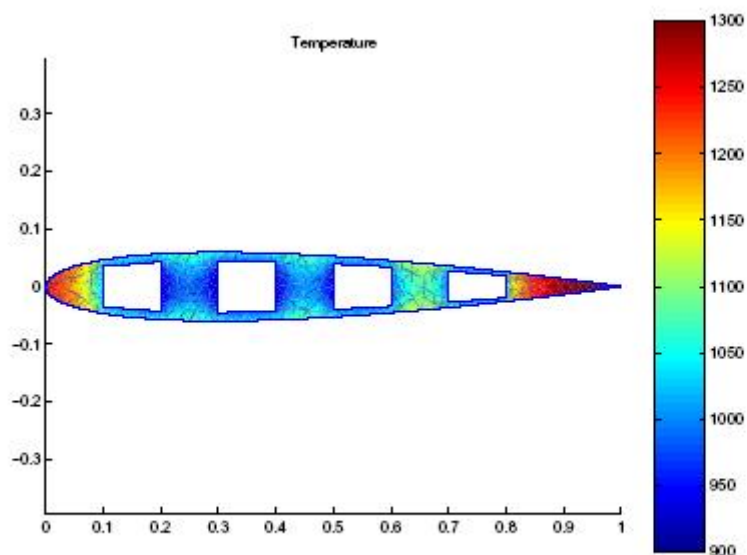
2.3 设计推荐

在机翼前后边缘，我们基本上有两种选择。一个应该是以某种方式降低外部温度。这个可以通过从叶片内部向表面吹冷空气实现(这就是我们所知的薄膜冷却)。结果是从叶片的角度来看温度变低了，其原因是我们看到的是通道中高温

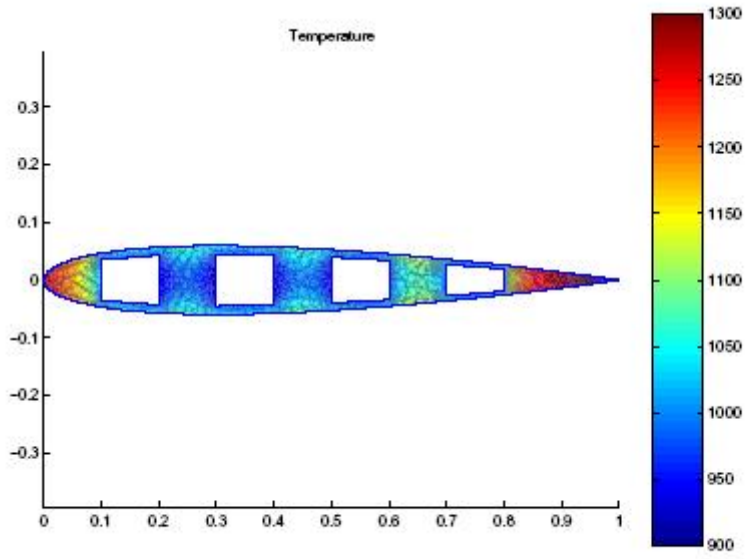
气体和用于冷却的低温气体的混合。另一个选择是找到一个使得冷空气到达叶片头尾边缘的方法。在机翼前边缘，这可以通过所谓的“喷淋”冷却实现，在该冷却方式中，冷空气吹向机翼前表面的内部。在机翼后边缘，翼弦上经常制造一系列的隙缝，使得冷空气可以通过。然后冷空气在尾边缘离开机翼。结果是在细长的尾边缘区域，确实存在一些冷空气，帮助降低该处的温度。



(a) Coarse grid



(b) Medium grid



(c) Fine grid

图 2: 有限元模拟得到的温度分布