工程中的概率方法

课程笔记 16．901

2003 年春

大卫.达尔莫法

1 概率概念概述

本节的目的是为了快速地回顾概率论中的一些基本概念。

1.1 结论和事件

我们认为试验或行为是可以多次重复进行的。每次重复进行的结果可记为 ζ. 某事件A 是满足一定条件结果的集合，一个基本事件仅包括一个单一的结果。

例：看检查涡轮喷气发动机动叶片的情形。设涡轮喷气发动机中的动叶片总数为N ，每次检查结果的记录是因损坏而必须更换的叶片数量，于是，结果就是一个非负整数集合$\{0, 1, 2,...,N\}$. 假如发动机被更换的叶片数大于某值，比如5片，则预示该发动机可能发生了重大的损伤，需要对其进行更为彻底的检查。在这种情况下，我们会关注更换叶片数量在$\{6, 7, 8,...,N\}$中的事件。但这不是一个基本事件，因为它包含了多于一个结果。当然，我们还会关注没有叶片更换的情况，而该事件仅包含一个单一的结果(即 0)，因此是一个基本事件。

1.2 概率的意义

给定某事件A, 事件A的概率$P\{A\}$假定满足如下性质：

- $P\{A\} \geqslant 0$.
- 仅当事件必然发生时， $P\{A\} = 1$.

- 给定两个互斥事件A 和 B, 则 $P\{A+B\}=P\{A\}+P\{B\}$.

1.3 随机变量

概率论的效用在于描述随机变量的性质。用最简单的话来说，随机变量可被定义为一个变量或参数，其值依赖于实际试验的不同结果。因此随机变量是一个结果的函数。我们用粗体字母表示一个随机变量，如：x. 我们已经知道x的值依赖于实际发生的结果，即 x = x(ζ).

例：我们接着看检查动叶片的例子。随机变量的一个非常简单的例子是实际检查中更换的叶片数，此时，随机变量就是刚好就是结果本身! 特别有,

$$N(\zeta)=\zeta.$$

好了，让我们试试稍复杂些的。航空公司所关心的是检修发动机的费用，不含更换叶片的费用，航空公司仅因进行检查所需的人工工资是C_I 美元（劳工费），更换一片叶片的费用是C_B（包括新叶片和劳工费），而且，如果更换的叶片数大于5，则由于必须进行更为彻底的检查，费用会急剧上升。我们将这一费用增量表示为 C_D. 既然检修的费用依赖于检查的结果（而且结果是随机的），显然检修费用是一个随机变量。

特别有,

$$C(\zeta)=\begin{cases} C_I+C_B\zeta, & \text{对于 } 0\le\zeta\le 5, \\ C_I+C_B\zeta+C_D, & \text{对于 } 6\le\zeta\le N. \end{cases}$$

1.4 概率密度函数 (PDF)

我们常关心参数为实数（即有无穷多个值）的概率。此时，概率密度

函数可用来描述参数处在某区间的概率。特别，当给定随即变量 x，使 $a \leqslant x \leqslant b$ 的概率为

$$P\{a \le x \le b\} = \int_a^b f(x)dx ,$$

其中$f(x)$ 就是 x 的分布密度函数（PDF）。

一个常见的（而且可能是最简单的）分布是均匀分布。对于均匀分布，我们假定其概率密度在某区域内是常数，在该区域外为零。

$$\text{均匀分布：}\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{对于 } a \le x \le b, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

其他的分布形式在1.9节中有介绍。

1.5 期望值和平均值

给定PDF, 随即变量的 x 的$f(x)$，则 x 的期望值定义为,

$$E\{\mathrm{x}\} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

x 的期望值也被看作平均值，我们也用符号 μ_x 表示。

1.6 方差和标准差

x 的方差定义为

$$\sigma_x^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_x)^2 f(x)dx.$$

值 σx 就是x的标准差。方差是x关于其平均值变化情况的一种测度，平均值和方差之间一个经常用到的关系式是

$$\sigma_x^2 = E\left\{\mathrm{x}^2\right\} - \mu_x^2$$

不妨试着证明一下!

1.7 累积分布函数(CDF)

x的累积分布函数(CDF)定义为 x $\leqslant x$ 的概率。特别有,

$$F(x) \equiv P\{\mathrm{x} \leqslant x\}.$$

由概率的基本假设条件,可以得出$F(-\infty) = 0$ (即x变成无穷大的概率为零)且 F $(+\infty) = 1$ (即x小于无穷大的概率为1). x 的 CDF 和 PDF 有如下关系,

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

于是,我们可以证明,

$$F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

进一步,着隐含了

$$f = \frac{dF}{dx}.$$

1.8 百分位数值

x 的 u百分位数值是满足下式的最小数 x_u

$$u = P\{\mathrm{x} \leqslant x_u\} = F(x_u).$$

注意，既然u是一个概率值，其区域为 $0 \leqslant u \leqslant 1$.

1.9 常用分布类型

1.9.1 正态分布

正态分布（或高斯分布）为：

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\left(x-\mu_x\right)^2/2\sigma_x^2}$$

我们用通用的记号 $x=N(\mu;\sigma)$ 表示x是服从均值为μ, 标准差为σ的正态分布的随机变量。

1.9.2 三角分布

这个分布常用于随即变量的最小值($x_{\min}$)，最似然值(x_{mpp})和最大值($x_{\max}$)可以估计出来，但实际的概率密度不清楚的情形。三角分布假设概率密度在$x_{\max}$达最大值，密度线性地变化到在最小点$x_{\min}$和最似然点x_{mpp}的处的零值。让我们推导这一情形的PDF.