16.609 家庭作业 #2

期限：2 月 19 日下午 2 点

1. 背景知识

模拟飞机的动力学是非常复杂的。要描述它的运动需要 12 个状态变量：包括三个位置量，三个速度量，三个角方向量和三个角速度量。但是，如果我们做一些假设，并同时对包含这 12 个相互耦合的参量的微分方程线性化，问题就可以大大简化。经过简化后我们将得到两个退耦的四状态系统，其中一个描述纵向运动，一个描述横向运动。

纵向模式甚至可以被进一步简化，在熟知的 pheugoid 模式和短周期模式下仍可得到相当精确的退耦模型。横向系统由于以下三种运动模式而很难简化：飘摆模式，螺旋模式和旋转模式。飘摆模式是偏航和旋转振动的结合。旋转模式中的旋转速度很快可以达到稳态。螺旋模式有可能有略微的稳定或者不稳定。不稳定的螺旋模式会导致飞机偏离其航线或者螺旋式俯冲。这三种水平模式将是第一个实例的内容，也是这节家庭作业的大部分问题的基础。

1.1 坐标系统及变量的定义

飞机的运动要通过某种相对静止的框架来测量，然而，我们通常只知道飞机相对于机身坐标系的性质。因此，我们需要确定的状态是机身的相对位置，运动旋转角度和角速度。图 1 画出了相对于机身坐标系（x_b, y_b, z_b）的力 (X, Y, Z)，力矩(L, M, N)和转动角速度(p, q, r)。

表 1 给出了相关变量的定义。线性化的运动方程是关于稳定性导数以及力和力矩关于状态的一阶导数的方程。这些导数都用下标的形式表示。如，$Y_\beta \equiv \dfrac{\partial Y}{\partial \beta}$。通常，稳定性导数都给出的是无量纲形式，如$C_{Y_\beta}$ 为Y_β的无量纲形式。特别注意，表 2 中的定义都是很常用的，而且在作业和实例中也会用到。表 3 给出了作业和实例中我们要研究的飞机的稳定性导数的值和维数。

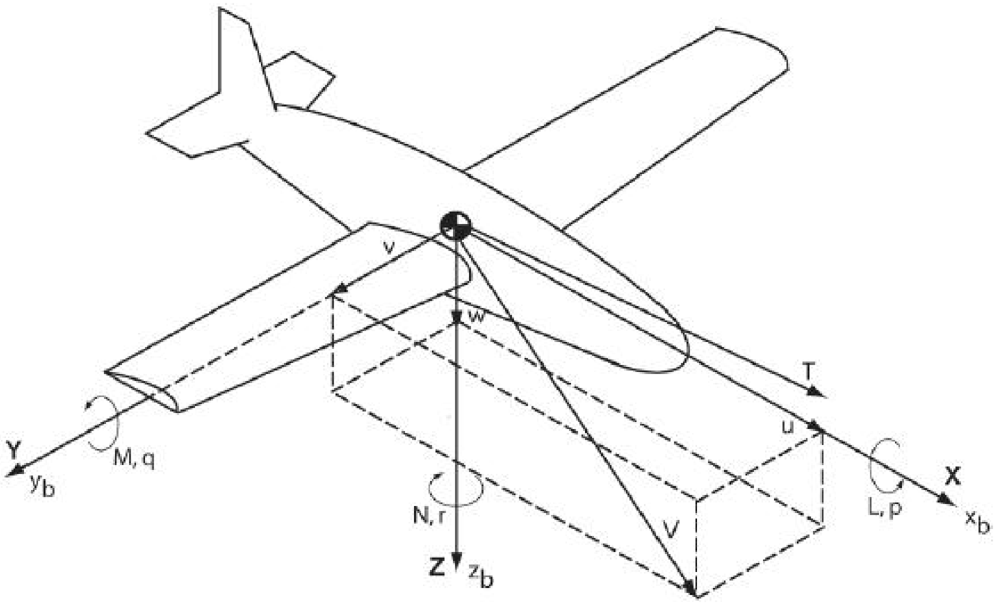

图 1：固定在机身上的坐标系的定义

	符号	描述
状态	$\Delta\beta$	侧向滑动角扰动
	Δp	旋转速度扰动
	Δr	偏航速度扰动
	$\Delta\phi$	旋转角扰动
力和力矩	Y	侧向力(y 方向的力)
	L	旋转力矩(绕 x 轴的力矩)
	N	偏航力矩(绕 z 轴的力矩)
其他量	Q	动压
	S	(机翼)平面形状面积
	b	翼展
	W	飞机重量
	m	飞机质量
	I_x, I_z, I_{xz}	惯性力矩
	g	重力加速度
	M_0	马赫数
	h_0	高度
	u_0	x 方向初始速度

表 1：变量注释

$Y_\beta = QSC_{y\beta}$	$L_\beta = QSbC_{l\beta}$	$N_\beta = QSbC_{n\beta}$
$Y_p = \dfrac{QSb}{2u_0} C_{yp}$	$L_p = \dfrac{QSb^2}{2u_0} C_{lp}$	$N_p = \dfrac{QSb^2}{2u_0} C_{np}$
$Y_r = \dfrac{QSb}{2u_0} C_{yr}$	$L_r = \dfrac{QSb^2}{2u_0} C_{lr}$	$N_r = \dfrac{QSb^2}{2u_0} C_{nr}$

表 2：无量纲形式的稳定性导数定义

1.2 运动方程

方程(1)-(4)给出了水平运动的线性化方程。方程(1)为 y 方向动量守恒方程。方程(2)为 x 方向角动量守恒方程。方程(3)为 z 方向角动量守恒方程。最后，方程(4)为旋转角与旋转速率的关系。特殊情形下，取控制方程形式如下：

$$(mu_0 \frac{d}{dt} - Y_\beta)\Delta\beta - Y_p \Delta p + (mu_0 - Y_r)\Delta r - mg\Delta\phi = 0 \tag{1}$$

$$-L_\beta \Delta\beta + (I_x \frac{d}{dt} - L_p)\Delta p - (I_{xz}\frac{d}{dt} + L_r)\Delta r = 0 \tag{2}$$

$$-N_\beta \Delta\beta - (I_{xz}\frac{d}{dt} + N_p)\Delta p - (I_z \frac{d}{dt} - N_r)\Delta r = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\phi = \Delta p \tag{4}$$

量	747 的值	F-104 的值
$C_{y\beta}$	-0.96	-1.17
Cyp	0	0
Cyr	0	0
$C_{l\beta}$	-0.221	-0.175
C_{lp}	-0.45	-0.285
C_{lr}	0.101	0.265
$C_{n\beta}$	0.150	0.50
C_{np}	-0.121	-0.14
C_{nr}	-0.30	-0.75
S	5500 ft^2	191 ft^2
b	195.68 ft^2	21.94 ft^2
h	海平面	海平面
M_0	0.25	0.257
W	636600 lbs	16300 lbs
I_x	18.2×10^6 $slug\ ft^2$	3549 $slug\ ft^2$

I_z	49.7×10^6 *slug ft*^{2}	59669 *slug ft*^{2}
I_{xz}	0.97×10^6 *slug ft*^{2}	0

表 3：波音 747 客机和 F-104 战斗机在海平面上各个量的值

2. 作业安排

1. 利用我们课程中已经或将要讨论的数值方法，将方程（1）－（4）变为线性系统的正则状态空间形式，

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ \Delta p\\ \Delta r\\ \Delta\phi\end{bmatrix}=\mathrm{A}\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ \Delta p\\ \Delta r\\ \Delta\phi\end{bmatrix} \tag{5}$$

其中 A 是 4×4 矩阵。我们将分两步来做。把不含导数的项移至控制方程的等式右端，导出下列形式的线性系统

$$\mathrm{M}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ \Delta p\\ \Delta r\\ \Delta\phi\end{bmatrix}=\tilde{\mathrm{A}}\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ \Delta p\\ \Delta r\\ \Delta\phi\end{bmatrix} \tag{6}$$

其中M叫做‘质量矩阵’。特别地，对机翼横向运动方程推出M和 $\tilde{\mathrm{A}}$（注意：不要代入任何数值，保持矩阵的符号形式）。第二步讲（6）式乘以 M^{-1}将给出所需方程形式 $\mathrm{A}=\mathrm{M}^{-1}\tilde{\mathrm{A}}$。为能使这一步成功，逆矩阵$\mathrm{M}^{-1}$必须存在。什么是逆矩阵存在的条件呢？假设矩阵时可逆的，求出M^{-1}的解析形式（注意：仍以符号形式表示）

2. 对飞机代入指定的数据，对两种飞机求特征根和特征向量。特征根和特征向量分别相应于旋转状态，螺旋状态和飘摆状态。解释特征根和特征向量显示了各种飞机在不同模式下的什么动力学特征。特别要评论模式的稳定性和和各种模式状态的相对数量级。这些飞机的动力学是否为刚性的（等价于回答此问题）？
3. 用特征值和特征向量，对各种飞机找出在以下初始条件下从 t=0s 到 t=100s 的分析解。

$$\Delta\beta(0) = 0.1rad,\ \Delta p(0) = 0,\ \Delta r(0) = 0,\ \Delta\phi(0) = 0$$

对各种飞机画出分析解的图。

2.2 数值积分方法的分析

1. 对下列方法求出能够合理模拟出飞机的稳定状态的最大时间步长：一阶 Adams-Bashforth 方法，一阶 Adams-Moulton 方法， 2 阶龙格-库塔(RK2)法。对各种方法画出稳定区域并在一张图上标出使用最大时间步长的特征值。
2. 用上面的结果确定对于各种飞机，那种计算方法是最有效的。包括你对于各种算法的精度、稳定性和工作量的分析。