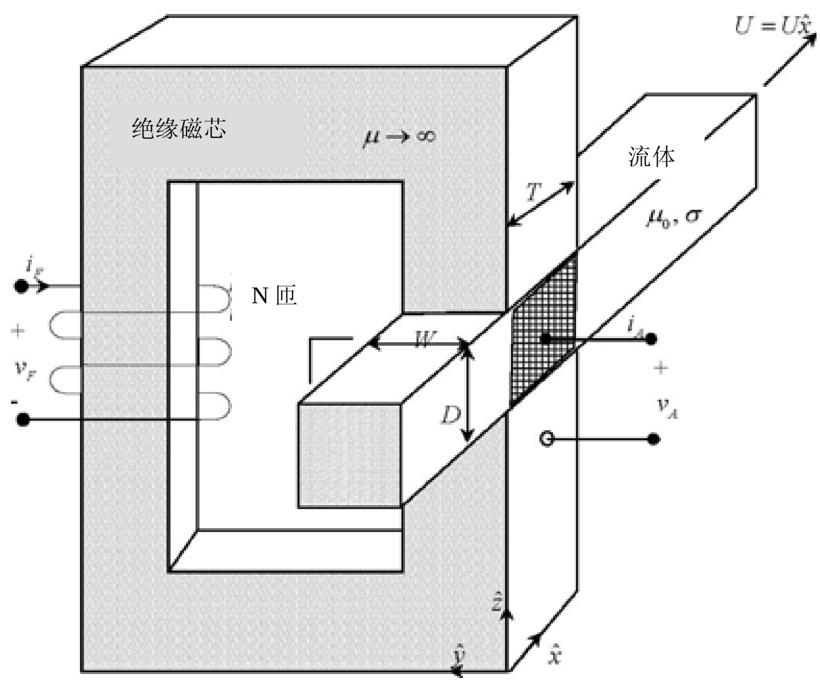
麻省理工学院
电气工程与计算机科学系
6.641 电磁场、电磁力和电磁运动

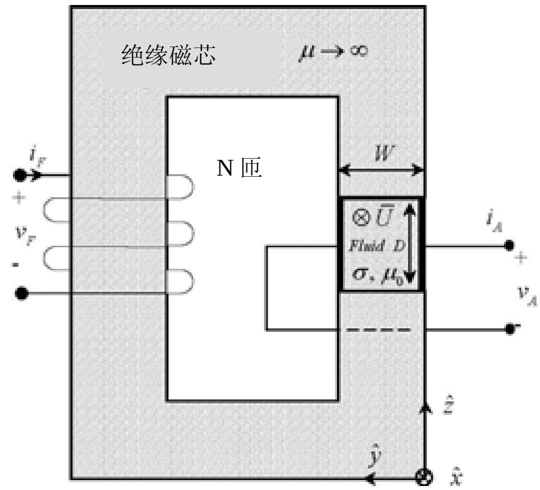
期末考试 2003 年 5 月 20 日
2003 春季，下午 1:30—4:30

6.641公式页附在学习材料一节中。允许使用你为测验1和测验2准备的两页公式，加上另一页为期末考试准备的8½’’×11’’纸（双面）的公式。

<u>问题 1</u>（20 分）

以下两图为一磁流体动力学发生器的两个不同视图。在此发生器中，电导率为σ、磁导率为μ_0的流体以速度 U 沿$\hat{x}$方向泵过一矩形管道。矩形管道的宽、高分别为W、D。该管道穿过一个在$\hat{x}$方向宽度为T的C形理想磁芯的缝隙。该磁芯被载有电流i_F、端电压为v_F的、匝数为N的理想导电线圈所激励。因为管道穿过C形磁芯，所以管道两边管壁与宽度T上方的液体具有理想的电接触。流过这些电枢触点的电流为i_A，两端电压为v_A。





a) 利用场电流 i_F 和发生器的参数，确定 C 形磁芯缝隙中 $\hat{z}$ 方向的磁通密度。对磁路进行合理的近似，并忽略由电枢电流产生的磁通密度。

b) 根据发生器的参数，确定线圈的自感。

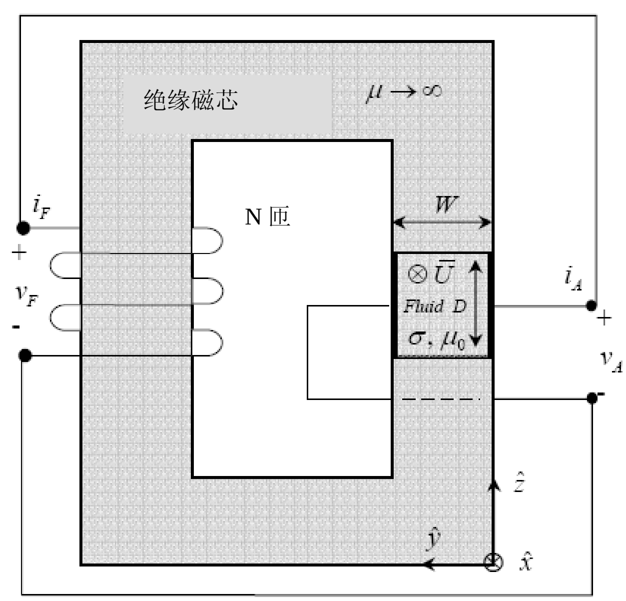
c) 稳定状态下，电枢的终端关系如下：

$$v_A = Ri_A + GUi_F$$

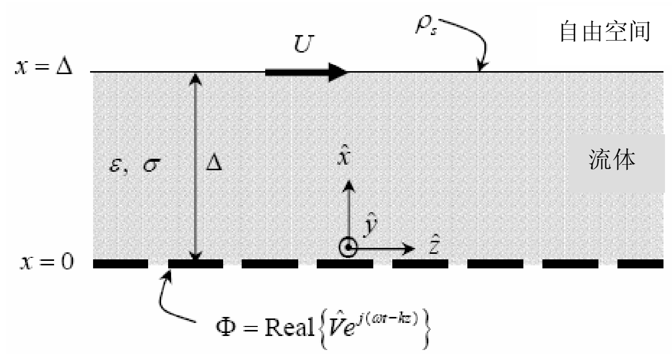
根据发生器参数，确定 R 、G 。

d) 根据 i_A、 i_F 、U及发生器参数，求将液体泵过管道所需要的机械功率。

e) 按下图所示方式连接发生器，使 $i_F = -i_A$、 $v_F = v_A$，用以产生自激。流速U在什么范围内将产生自激？忽略任何电枢的电感。



问题 2（20分）



如上图所示，一平面电极上高度为Δ的空间内填充着电导率为σ、介电常数为ε的液体。电极被激励以维持一个沿$\hat{z}$方向行进的振幅为$\hat{V}$、瞬时频率为ω、空间波数为k的电位波。这种电激励抽吸液体，从而在$x=\Delta$处与自由空间的分界面以速度U沿$\hat{z}$方向运动。假设系统工作在正弦稳定状态下，因此，液体和自由空间中的电位为如下形式：

$$\Phi_{液体}=\mathrm{Re}\,al\left\{\left(\hat{\Phi}_A\frac{\sinh(kx)}{\sinh(k\Delta)}-\hat{\Phi}_B\frac{\sinh\left(k(x-\Delta)\right)}{\sinh(k\Delta)}\right)e^{j(\omega t-kz)}\right\}$$

$$\Phi_{自由空间}=\mathrm{Re}\,al\left\{\hat{\Phi}_C e^{-k(x-\Delta)}e^{j(\omega t-kz)}\right\}$$

在$x=\Delta$处的液体与自由空间分界面上，自由电荷面密度为：

$$\rho_s=\mathrm{Re}\,al\left\{\hat{\rho}_s e^{j(\omega t-kz)}\right\}$$

a）根据$\hat{\Phi}_A$、$\hat{\Phi}_B$和$\hat{\Phi}_C$求液体内及其上方自由空间内的电场。

b）利用与高斯定理有关的EQS系统边界条件和无旋电场$\overline{E}$，写出$\hat{\Phi}_A$、$\hat{\Phi}_B$、$\hat{\Phi}_C$和电荷面密度$\hat{\rho}_s$之间，以及与液体和激励参数有关的三个边界条件。

c）依据$x=\Delta$处电荷守恒边界条件，写出$\hat{\Phi}_A$、$\hat{\Phi}_B$、$\hat{\Phi}_C$和电荷面密度$\hat{\rho}_s$之间，以及与液体和激励参数有关的第四个边界条件。

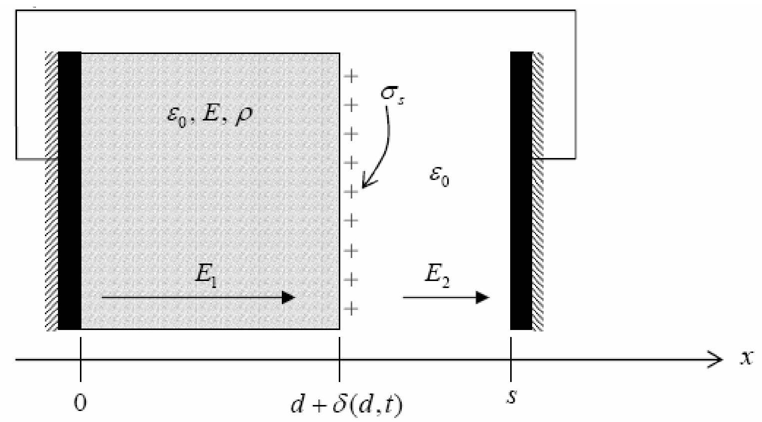
d）根据液体和激励参数，结合A、B中求得的4个边界条件，确定$\hat{\Phi}_A$、$\hat{\Phi}_B$、$\hat{\Phi}_C$和$\hat{\rho}_s$。

e）求作用在液体自由表面上沿$\hat{z}$方向抽吸液体的空间平均压力。

问题 3（20分）

一个具有自由空间介电常数ε_0、密度为ρ、弹性模量为E、放松状态下长度为d的弹性介质，放置在固定间距为s的短路电极之间。两电极均被固定而不能移动。左边固定的电极在$x=0$处粘贴在弹性介质上，所以$x=0$处的弹性位移为0。弹性介质和右侧电极之间有一个空隙。弹性介质与空隙之间的界面上置以密度为$\sigma_s\,C/m^2$的恒定量的面电荷。弹性介质可以有小信号位

移 $\delta(\mathrm{x,t})$，并且在 $x=d$ 处小信号弹性位移为 $\delta(d,t)$。另外注意，弹性介质和空隙具有相同的介电常数 ε_0。忽略边缘场效应。



a) 对于界面位移 $\delta(d,t)$，弹性介质和自由空间中的电场 E_1、E_2 形式如下：

$$E_1 = A(B+d+\delta(d,t))$$
$$E_2 = C(D+d+\delta(d,t))$$

式中 A、B、C、D 为常数。A、B、C、D 等于多少？

b) 在 $x=d+\delta(d,t)$ 界面上单位面积的电场力为：

$$\frac{F_e}{\text{面积}} = F + G\delta(d,t)$$

式中 F、G 为常数。利用(a)的结果确定 F 和 G。

c) 稳态弹性位移 $\delta_{ss}(x)$ 等于多少？

d) 现假定系统受到轻微的扰动，从而弹性位移形式为：

$$\delta(x,t) = \delta_{ss}(x) + \delta'(x)$$

取 $\delta'(x)$ 的一般形式为：

$$\delta'(x,t) = \mathrm{Re}\left[\hat{\delta}(x)e^{j\omega t}\right]$$

求 $\hat{\delta}(x)$ 的空间关系。

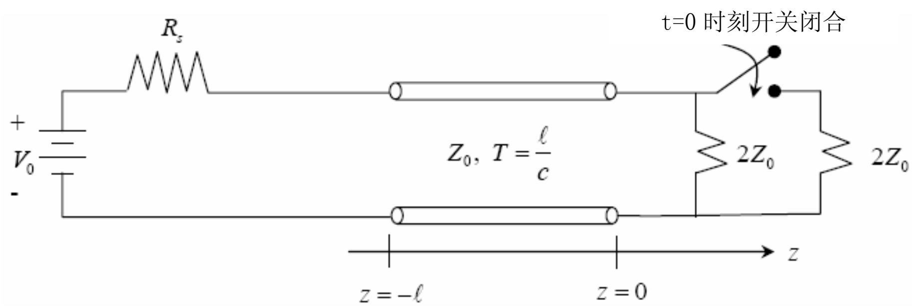
e) 系统特征频率取如式形式：

$$\tan(kd) = Hkd\ ,\ k = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

式中 H 为常数。H 等于多少？

f) σ_s 为何值时，系统第一次处于不稳定状态？

问题 4（20分）



一长度为l、特性阻抗为Z_0、波速为c的传输线，当开关断开时，在$z=0$处的负载为$2Z_0$，当开关闭合时，负载为Z_0。在$z=-l$处，传输线与电压为V_0的直流电源和源电阻R_s相串联。

a） $t<0$时，$z=0$处的开关断开，将电压源与传输线连接足够长的时间，以致所有暂态波都消失，并且传输线上的电压和电流都处于直流稳定状态。$t<0$时传输线上的稳态电压、电流等于多少？

b） 当传输线处于（a）所描述的直流稳定状态时，对于$t>0$的所有时间，$z=0$处的开关闭合。此时传输线上的合成暂态电压波和电流波可以写成：

$$v(z,t)=v_+\left(t-\frac{z}{c}\right)+v_-\left(t+\frac{z}{c}\right)\ ;\ i(z,t)Z_0=v_+\left(t-\frac{z}{c}\right)-v_-\left(t+\frac{z}{c}\right)$$

$t=0$和$t=\infty$时刻的$v_+\left(t-\frac{z}{c}\right)$和$v_-\left(t+\frac{z}{c}\right)$等于多少？

c）在$z=0$处，$t>0$时刻将开关闭合，计算：

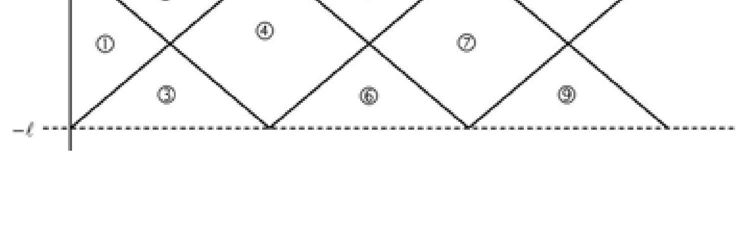
$$\left.\frac{V_-}{V_+}\right|_{z=0}$$

d）在$z=-l$处，$t>0$时刻$+z$方向的波由下式表示：

$$V_+\big|_{z=-l}=A+BV_-\big|_{z=-l}$$

A、B等于什么？

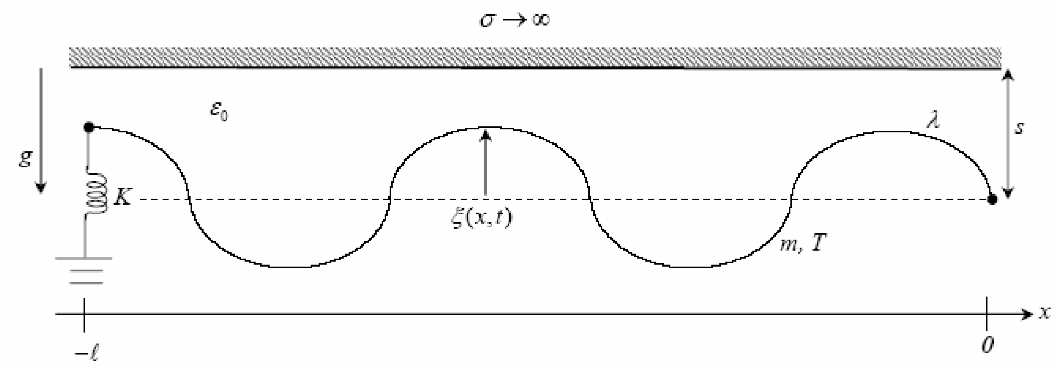
e）在z-t空间划分的求解区域中的波轨迹如下所示：



考虑 $R_s=0$ 的情况。1、2、3、4、5、6、7、8、9各区域中 V_+ 和 V_- 等于多少？

f）给出 $t\geq 0$ 时 $v\left(z=-l/4,t\right)$、$i\left(z=-l/4,t\right)Z_0$ 的标定曲线。

问题 5（**20分**）



一根单位长度质量为 m、均匀张力为 T 的绳子，在其长度 l 上均匀分布有线密度为 λ 库仑/米的线电荷。该带电的绳子放在一接地的理想导体下方 s 处，周围为自由空间。该绳子在 $x=0$ 处被固定，并维持着小信号位移 $\xi\left(x,t\right)$。在 $x=-l$ 处，绳子被固定在一弹性系数为 K 的线性弹簧上。弹簧和细线的连接点只能垂直运动。当 $\xi(x=-l,t)=0$ 时，弹簧不施力，因此弹簧施加的弹力为 $-K\xi(x=-l,t)$。重力垂直向下。

a）在长波限制下，当 $\xi(x,t)\ll s$ 时，绳上单位长度的电场力与 $\xi(x,t)$ 的一阶关系是什么？

b）若要使绳子具有 $\xi(x,t)=0$ 的平衡状态，λ 的取值应为多少？

c）对于如下形式的小信号波：

$$\xi(x,t)=\mathrm{Re}\left[\hat{\xi}e^{j(\omega t-kx)}\right]$$

$\omega-k$ 传播关系是什么？

d）利用 $x=0$、$x=-l$ 处的边界条件，k 的可能取值可以从以下的超越方程得到：

$$\tan(kl)=Ckl$$

式中 C 是常数。C 等于多少？

e）如果弹簧的弹性系数为零，即 $K=0$，（d）中的波数 k 的解是什么？

f）对于（e）的条件，绳子能够稳定维持 $\xi(x,t)=0$ 的最大单位长度质量 m 等于多少？