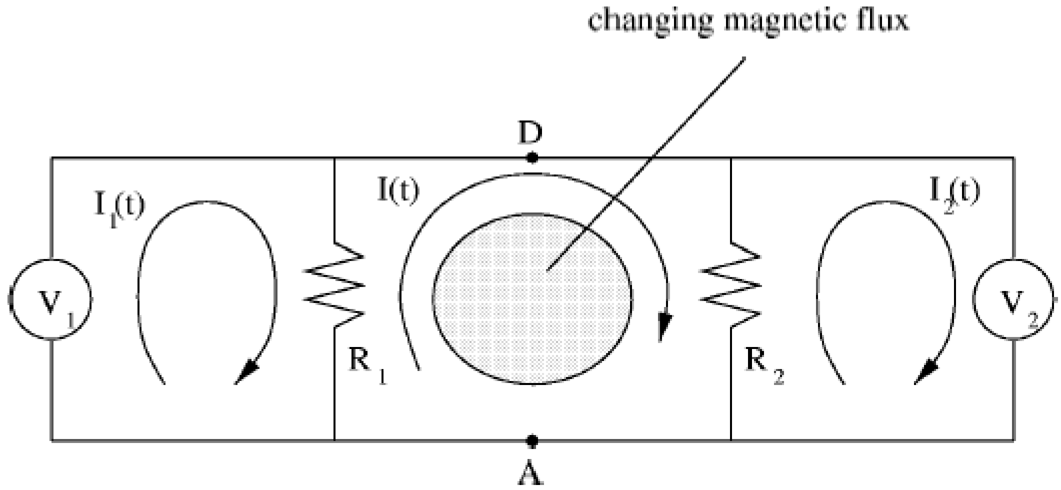
物理－8 . 02　　　　麻省理工物理系　　　　2002. 03. 15

非保守场——不要相信你的直觉！

下面的笔记有助于你发掘我在 3 月 15 日周五讲座中讨论和证明的关于法拉第定律的一些非直觉性的结果。



如图阴影区表示磁场；与纸面垂直，随时间变化。两个同样的伏特计 V_1 和 V_2，两个电阻 R R_1 和 R_2；两只伏特计各自内阻 R_i 远远大于 R_1 和 R_2。忽略所有导线电阻。

电路中有三个闭合回路：左侧回路有伏特计 V_1 和电阻 R_1，中间回路有两个电阻，右侧回路有伏特计 V_2 和电阻 R_2。回路中电流分别为 I_1（t），I（t）和 I_2（t）（如上图所示）。假设 t 时刻各回路电流顺时针方向。若电流变成负的，意味着电流变为逆时针方向。

对左右闭合回路应用基尔霍夫第二定律：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{1}$$

然而中间的回路不能使用此定律；**必须**使用法拉第定律，同样我们也能对左右回路使用（右侧法拉第定律为零）：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} \tag{2}$$

注意：感生 EMF，ε，仅依赖于穿过闭合回路任意开曲面磁通量的变化，因此它依赖于阴影区域 $\boldsymbol{B}$ 场的变化（既然能选取任意开曲面，我建议选取一种开曲面在纸面内的情形）。ε 因此独立于 R_1 和 R_2。

应用上述方程，从 A 开始，各环路分别顺时针方向环绕，有：

左侧　方程(1)　$I_1R_i + I_1R_1 - IR_1 = 0$　(3)

中间　方程(2)　$IR_1 + IR_2 - I_1R_1 - I_2R_2 = \mathcal{E}$　(4)

右侧　方程(1)　$I_2R_2 - IR_2 + I_2R_i = 0$　(5)

R_i>>R_1，R_i>>R_2，因此 I_1<<I，I_2<<I，方程化简为：

$$I_1R_i - IR_1 \approx 0 \qquad (6)$$
$$I\,(R_1 + R_2) \approx \mathcal{E} \qquad (7)$$
$$I_2R_i - IR_2 \approx 0 \qquad (8).$$

每个伏特计的读数取决于通过它的电流（I_1 通过左侧伏特计，I_2 通过右侧伏特计）。伏特计刻度已经校准了可以显示通过伏特计及其内阻的电流产生的电压值。这样，左侧伏特计读数 $|V_1| = I_1R_i$，右侧伏特计读数 $|V_2| = I_2R_i$，代入方程（6）和（8），有：

$$|V_1| = I_1R_i \approx IR_1 \qquad (9),$$
$$|V_2| = I_2R_i \approx IR_2 \qquad (10).$$

若所有伏特计连接以 A 侧为“ ＋ ”(连接以 D 侧为“ － ”)，则伏特计 V_1 和 V_2 的示数任何时刻任何点都是异号的，正如讲座中所证明的。显然你立刻意识到顺时针电流 I 要求电流 I_1 和 I_2 也是顺时针（由方程（6）和（8）可知 I_1 和 I_2 总是同号）。这表示当左侧伏特计中电流从“ ＋ ”(A 侧）到“ － ”(D 侧）的时候，显示“ 正 ”的伏特，当右侧伏特计中电流从“ － ”（D 侧）到“ ＋ ”(A 侧）的时候，显示“ 负 ”的伏特。

若 R_1 和 R_2 已知，对于给定的 ε（时间上给定一点，见方程 2)，可由方程（7）计算电流 I，伏特计示数遵从方程（9）和（10)，但是它们符号相反。注意：$|V_2 / V_1| \approx R_2 / R_1$（独立于 I)。

例子

假设：$\varepsilon = 1$ 伏特（在给定瞬间，磁通量是垂直纸面向外增加的)，$R_1＝100\Omega$，$R_2＝900\Omega$，$R_i＝10^7\Omega$，由方程（7)，$I\approx1.0\times10^{-3}$A（顺时针)，由方程（9）和（10)，有 $|V_1|\approx\frac{1}{10}$ 伏特，$|V_2|\approx\frac{9}{10}$ 伏特，V_1 和 V_2 的极性相反!

若你对电流 I_1 和 I_2 感兴趣，由方程（9)，有 $I_1\approx1.0\times10^{-8}$A，由方程（10)，我们有 $I_2\approx9.0\times10^{-8}$A。注意与 I 相比它们有多小。电流 I_1 和 I_2 都是顺时针方向。

若 $R_1＝5\Omega$，$R_2＝45\Omega$（比上例小 20 倍)，I 大约为 2.0×10^{-2}A（比上例大 20 倍)，但是 V_1 和 V_2 的值和上例相同！

这样，对给定的 $R_1/R_2=9$，任何时候有 $|V_1|\approx\frac{1}{10}\varepsilon$，$|V_2|\approx\frac{9}{10}\varepsilon$，但极性总是相反的！

总结

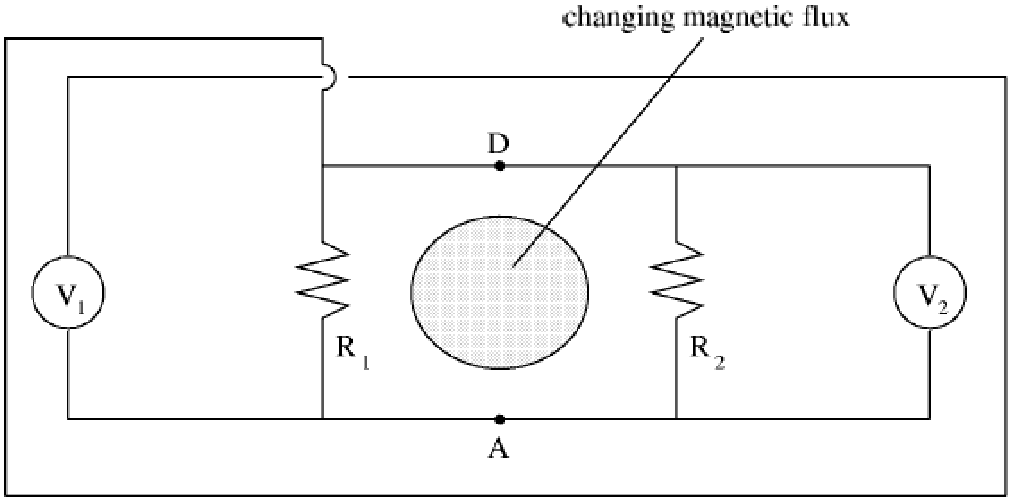
若电流 I 从 A 到 D 流过电阻 R_1，AD 之间“ 电势差 ”[1] 是 $\approx IR_1$（A 比 D“ 电势 ”高)，($V_A - V_D$）值被左侧伏特计记录。若穿过 R_2 回到 A，DA 之间“ 电势差 ” $\approx IR_2$（D 比 A“ 电势 ”高)，($V_D - V_A$）值被右侧伏特计记录。因此，一旦完成了中间闭合回路之旅从 A 又回到 A，“ 电势差 ”[1] $V_A - V_A \neq 0$。离奇吗？不，注意方程（2)！

在非保守场，电势差[1]是两点间$\vec{E}\cdot d\vec{l}$的积分，它依赖于路径，我们的直觉彻底垮掉了。

自测

测试 1.

若您想看一下是否理了解复杂概念，计算下图 V_1 和 V_2 的读数。注意左边伏特计导线在第一页的图中连接着 D 侧，现在仍然连接着 D 侧，但是它缠绕电路一周。R_1 上面的小弧度表示它没有与水平的导线短接，是个二维方案。强调一点，水平线在弧左右看上去断开了实际上是连续的。



测试 2

现在用同样的方式缠绕导线不是一次而是 100 次，然后连接到 D 侧。无疑，你已经制造了一个变压器(关于变压器的讨论我们将在后续课程中讨论)。现在 V_1 和 V_2 的读数又是多少呢？

我希望这是有帮助的，并不简单！

Walter Lewin

[1] 非保守场最好不要用“ 电势差 ”这个词汇，可以用$\vec{E}\cdot d\vec{l}$沿着特定路径的线积分这一说法替代。