翻译：奚衍斌　　　　校对：

物理－8 . 02　　　　　　　　麻省理工　　　　　　　　2002. 04. 01

几乎所有大学物理教程的作者们对回路中的电感恰当使用法拉第定律有些迷惑。Giancoli 除外。John Belcher 教授（多次讲授过 8.02）在附录中有很棒的更正。如下。我（Walter Lewin）在 Giancoli（Belcher 使用了不同教程却有相同的错误）和我在 2002.03.15 的 8.02 讲义的基础上稍做修改，或许对第一次读 3 月 15 日关于非保守场的附录有帮助。

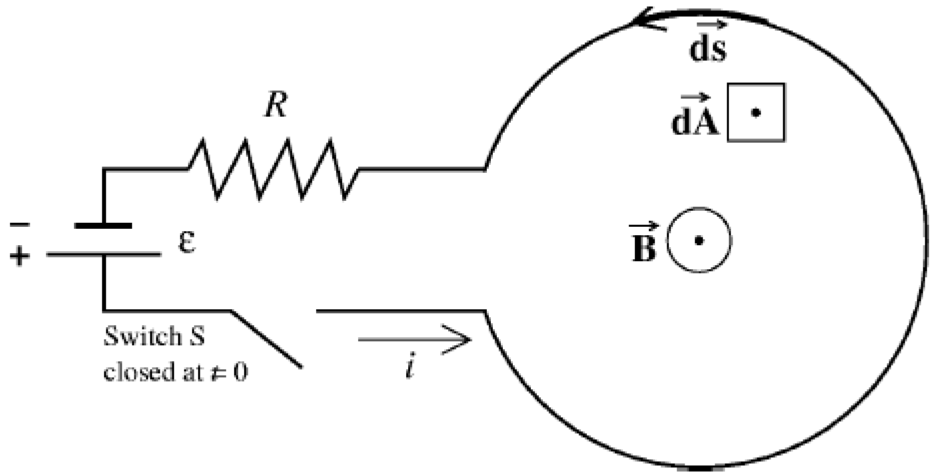
自感－基尔霍夫定律－法拉第定律

简单回路加上时变磁场意味着电场沿着闭合回路积分不再是零。做为替代，对于任何开曲面，我们有

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d}{dt}\int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

回路中变化的电流会产生随着时间变化的磁场，因此，感生出电场。那我们如何定量的解决简单回路中的这种效应呢？这里我们讨论在回路中引入时变磁场并得到结果的一般方法。那就是电感。

介绍时变磁场的同时，回路中两点间的电势差不再有很好的定义，因为沿着闭合路径的电场积分不再为零。 点 a 和 b 之间电势差不再独立于从 a 点到 b 点的路径。就是说，这个电场不再是保守场，电势的概念在这里不适用了（$\vec{E}$ 不再能写成标量势的负梯度）。然而我们仍然能够写下决定回路状态的简洁的方程。



怎么做呢？考虑如上图所示回路由电池、电阻、t＝0 时刻闭合的开关 S 以及单线圈电感器构成。接下来的电感就很清楚了。对于 $t > 0$ 时刻，电流方向如图所示（照例从正电极流向负电极），那么 $t > 0$ 时刻决定电流 i 的行为的方程是什么呢？

要研究这一点，需要在以该回路为边界的开曲面上应用法拉第定律，这里选取 $d\vec{A}$ 方向垂直纸面向外、$d\vec{S}$ 遵照右手定则取逆时针方向。首先，电场沿此回路的积分是什么？电池

中有电场，从电池正极直接指向电池负极，我们沿选定的$d\vec{S}$方向穿过电池，我们逆着电场方向移动，所以$\vec{E}\cdot d\vec{s}$是负的。这样，电池对积分的贡献是$-\varepsilon$。然后，电阻中有电场，沿着电流方向，所以我们是沿着正方向穿过电阻，$\vec{E}\cdot d\vec{s}$是正的，对积分的贡献是$+iR$。当我们进入单线圈电感时的情形又该如何呢？假如做成环路的导线电阻为零则环路中无电场。（这一点或许令你很烦恼，如果是这样，请看下一章节）。假如导线有一个$r << R$的小电阻，那么导线中会有一个电场，对电场积分的贡献就是$+ir$，我们把这一项和前面已经得到的iR项合并到一起（就是说我们重新定义的 R 包括了所有电阻）。因此，绕闭合环路一圈，我们有

$$\oint \vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{ds}} = -\varepsilon + iR$$

现在，穿过开曲面的磁通量ϕ是多少呢？首先，几何上我们认为相对于包括单线圈电感的整个开曲面来说，电池、开关、电阻这部分回路对ϕ的贡献很小。其次，我们知道这部分曲面的ϕ是正的，因为电流逆时针方向产生的$\vec{B}$垂直纸面向外，和我们假定的$d\vec{A}$方向相同，这样，$\vec{B}\cdot d\vec{A}$是正的。注意到$\vec{B}$是自身的磁场，即该磁场由回路中的电流产生而不是其他外部电流。

由毕奥萨伐尔定律可知，空间任意点的$\vec{B}$与电流成正比，

$$\vec{\mathbf{B}} = i\oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathbf{ds}}\times\vec{\mathbf{r}}}{r^3}$$

显然从表达式可知，尽管空间上的点含有沿回路的复杂积分，$\vec{B}$处处与电流正比。就是说，如果电流增加一倍，空间中每一点上的$\vec{B}$也增大一倍，其他量也是如此。接下来，既然磁通量ϕ是$\vec{B}$沿着开曲面的积分，$\vec{B}$处处跟电流成正比，那么，磁通量ϕ本身也要和电流成正比。

这样，我们有$\phi = Li$，这里L是常数，由给定的回路中导线确定。如果我们改变了回路的几何形状（比如，假设图上圆的半径缩短一半），L也将改变，但是对于给定的几何形状，L是固定的值。L的大小叫做回路的自感系数或简称为自感。由这个定义可知，自感系数有μ_0的量纲。我们将在下面给出单线圈L的估计。

首先，我们写下决定电流i随时间演化的方程。如果$\phi = Li$，那么ϕ的时间变化率就是Ldi/dt，这样由法拉第定律我们有

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{ds}} = -\varepsilon + iR = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \tag{1}$$

如果我们用L去除方程（1），整理后决定电流i的方程为$di/dt + (R/L)i = \varepsilon/L$，方程解的初始条件为$i(t) = (\varepsilon/R)(1 - e^{-Rt/L})$，（见 Giancoli,方程 30-9，P762）。$i(t)$的解正如我们所期望的随时间增长的很大，电流从 t＝0 时刻的零连续增长到恒定值ε/R，时间特征量为$\tau_L = L/R$（τ_L称为电感的时间常数）。这就是回路中存在的非零自感效应。例如，考虑由时变磁场引起的电场。这是我们期望从楞次定律得到的结果－－系统力图保持原有状态的反应，即延迟内建电流（或者衰减电路中已经存在的电流）。

基尔霍夫第二“ 定律 ”对电感器的修正

我们能够根据上面的方程（1）写出关于$i(t)$的方程，

$$+\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = \Delta V_i = 0 \tag{2}$$

这里我们可以在形如基尔霍夫第二定律的公式中计算它，也就是说，沿着回路的位势降总和为零（我们仍然逆时针沿回路移动，只不过总的符号由方程（1）变化到方程（2），因为我们是在累加“ 电势 ”的变化）。

我们的课本（Giancoli）选择了保留基尔霍夫第二定律近似回路的电感系数，或者用穿过电感器的电势降近似环路定理。要得到正确的方程，Giancoli 必须针对电感器增加一个如下的“ 定则 ”：

电感器：如果一个电感器被穿过的方向与电流方向一致，则位势变化是$-Ldi/dt$；如果被穿过的方向与电流方向相反，则则位势变化是$+Ldi/dt$。

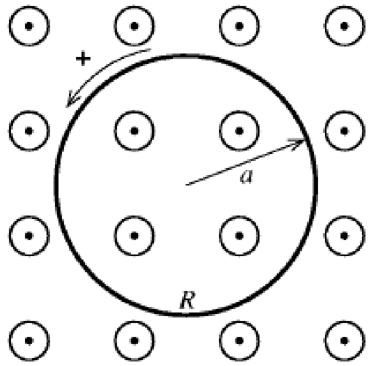
尽管 Giancoli 从未明确叙述这条定则，但是他在 30－4，30－5 以及 30－6 节中运用环路定理的时候，暗含了该定则。

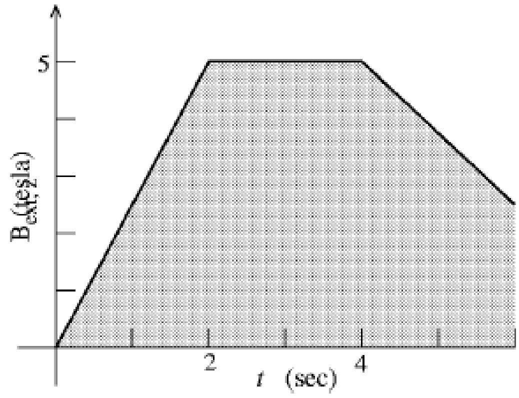
该形式的使用将给出正确的方程。然而，连续的使用附加定则的基尔霍夫第二定律容易引起误解，以物理学的观点来看，在某些层面上存在致命错误，理由如下：基尔霍夫第二定律最初是基于电场$\vec{E}$沿着闭合环路积分为零这一事实。当存在随时间变话的磁场时，积分不再为零，因此绕电路的“ 电势降 ”之和也不再为零，而是电场沿闭合回路积分的负值，即$+Ldi/dt$。像大多数课本所做的那样，Giancoli 在方程的另一端引入了Ldi/dt项，与电场$\vec{E}$沿闭合回路积分的负值相加，把它归属为穿过电感器的“ 电势降 ”。

这样的近似给出了正确的方程，但是的确混淆了物理概念。特别的，某一“ 电势降 ”以

$-Ldi/dt$ 穿过电感器意味着电感器中存在一个电场，这样 $\vec{E}$ 沿着电感器的积分在量上与 Ldi/dt 相等。这并不总是对的，在我们上述例子中是对的（上面 $\vec{E}$ 沿着我们的单线圈电感器积分是零，不是 Ldi/dt）。

上述单线圈电感器的 $\vec{E}$ 为零的事实也许令你迷惑了，而且理由充分。你已经建立起了关于感生电场的一些直觉，这些直觉是基于我们目前为止已经和正在做的法拉第定律问题。事实上，通常有时变磁场的时候，就有一个电场，即 $d\vec{B}/dt$ 不为零。那将使你认为 Giancoli 是对的，电感器中有这样一个电场，有这样一个电势降穿过它。当时变磁场通过时，单线圈电感器中 $\vec{E}$ 为零，回路中什么发生了变化呢？这一点非常微妙，也是无穷的迷惑之源，所以让我们来仔细的考虑。





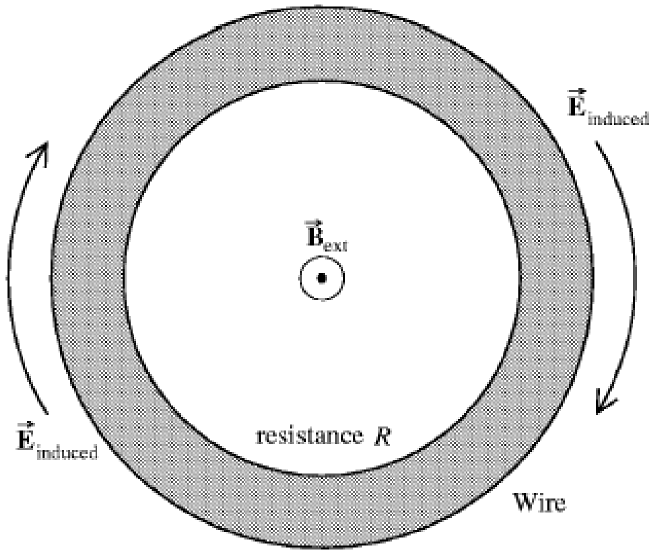
我们对于电感器中应当有电场的直觉是基于求解上图所示的问题。一圆环导线半径为 a，总电阻为 R，位于垂直纸面向外的外加磁场中，该磁场随时间变大。这种情况和我们上面所述的单线圈电感器不同，我们忽略了导线本身中电流所产生的磁场。这里得到的结论可以很好的应用与自感现象上。

外加磁场的变化使得导线环中感生电场增加，线积分为 $-\pi a^2(d\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}/dt)$。该感生电场绕圆环方位角均匀分布（如图所示）。由法拉第定律我们有，

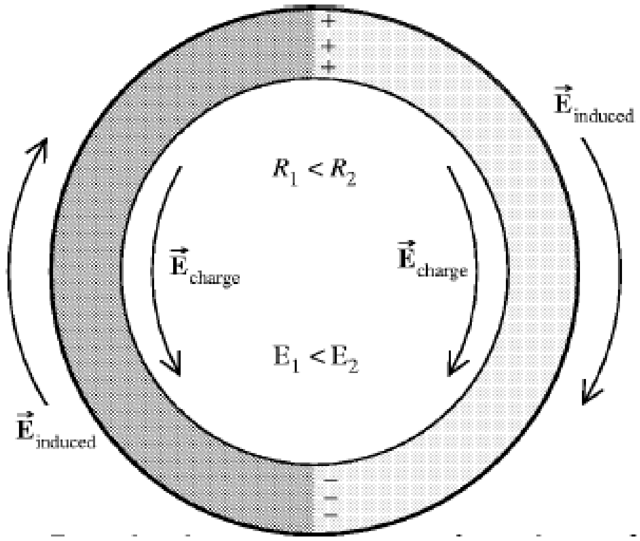
$$
\begin{aligned}
2\pi a\vec{\mathbf{E}}_{\text{induced}} &= -\pi a^2\frac{d\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}}{dt} \\
\Rightarrow \vec{\mathbf{E}}_{\text{induced}} &= -\frac{a}{2}\frac{d\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}}{dt}
\end{aligned}
$$

像这样假如电阻沿导线环均匀分布，我们在圆环中得到均匀的 $\vec{E}_{induced}$，圆环中各点值处处相同，且随 $\vec{B}_{ext}$ 顺时针方向随时间增长。此电场引起一个电流，电流密度为 $\vec{j}=\vec{E}_{induced}/r$（欧姆定律的微观形式）。导线圆环中总电流就是绕圆环总“电势降”除以

电阻 R（宏观欧姆定律），或者 $2\pi a\vec{E}_{induced}/R$。此电流像 $\vec{E}_{induced}$ 一样顺时针环流。像这样假如电阻沿导线环均匀分布，我们在圆环中得到均匀的 $\vec{E}_{induced}$，圆环中各点值处处相同，且随 $\vec{B}_{ext}$ 顺时针方向。



但是，假如绕圆环电阻非均匀分布时电场会发生什么呢？例如，设左半环电阻 R_1,右半环电阻 R_2，$R=R_1+R_2$，因此，总电阻和上面例子一样（如下图所示）。进一步假设 $R_1< R_2$。注意和 2002 年 3 月 15 讲稿中的演示 I(Walter Lewin)的一些相似性(请阅读我的讲稿附录)。现在电场绕导线环是如何分布的呢？首先，电路中的 emf 和上面例子相同，总电阻相同，这样电流 i 也和上面相同。此外，由守恒性，圆环两端必须相同。但是左半侧圆环电场（$\vec{E}_1$）现在和右半侧（$\vec{E}_2$）不同。



这是因为左侧电场线积分是$\pi a \mathrm{E}_1$，根据欧姆定律等于iR_1，同理$\pi a E_2 = iR_2$。因此，$E_1 / E_2 = R_1 / R_2$，既然有 $R_1 < R_2$，所以有$E_1 < E_2$。这样做是有意义的。尽管电阻不同，我们必须在两侧得到相同电流。我们通过越来越小的电阻来调节电流达到这一点。因为电阻越小，另一侧小电场的电流也越小，电流也就越接近。

但是，均匀电场发生了什么呢？有两种方式产生电场——一种通过随时间变化的磁场，另一种通过电荷充电。通过圆环分段结点处的充电（如上图所示）比较$\vec{E}_1$和$\vec{E}_2$得到简化，正电荷在上，负电荷在下。总电场是外界变化磁场感生出电场（$\vec{E}_{induced}$，如上图所示，顺时针方向），和图中结点处电场（$\vec{E}_{induced}$，如上图所示，从正电荷到负电荷总有电场存在）之和。很明显，两部分对总电场贡献不一样，左侧的对总电场的作用是削弱而右侧对总电场的作用是增强。场$\vec{E}_1$总是顺时针方向（因为必须产生顺时针电流），但是，在 $R_1 \ll R_2$的情况下，它可视为任意小。然而按照法拉第定律，我们总是有$\vec{E}$沿闭合圆环积分等于$-\pi a^2 (d\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{ext}}/dt)$。

因此我们可以看到，用非均匀的电阻可以在电感器中得到非均匀的电场，尽管直觉告诉我们给定半径内感生电场应该是均匀的。事实上另有办法产生电场，命名来自电荷，自然需要使用那个事实。法拉第定律告诉我们$\vec{E}$沿闭合圆环线积分等于穿过闭合曲面磁通量随时间变化率的负数。并没有说明绕环的$\vec{E}$在什么位置是非零的，在某些想不到的地方它可能为零也可能不为零。上面单线圈电感器的场是零（或至少为极小），仅在电阻和电池中有显著的场，正如我们这里考虑过的理由。

最后一点，假设伏特计探针穿过电路的电感器两端（电阻很小）。能测量到什么呢？伏特计上显示的是“伏特降”——Ldi/dt。并不是因为电感器中有电场！而是因为置于电路中的伏特计受到穿过伏特计回路的随时间变化的磁通量作用，回路由电感器、伏特计引线和伏特计中的内部大电阻组成（见 2002. 03. 15 我的讲稿附录）。伏特计中会有电流流动，因为对回路应用法拉第定律，伏特计内部大电阻中有电场，穿过电阻的势降为Ldi/dt，这就是伏特计的读数。伏特计测量出了自身内阻的势降，而不是电感器的势降。它测得的是伏特计回路中磁场通量的时间变化率！此前，电感器电阻相对于回路中的其他电阻非常小，所以其中仅有很小的电场。

如果你对此疑惑，也很正常。这是本课程中最难的和最精妙的题目之一，令专家也难住了。不简单！